Des maths dans ma contrebasse

Marc Roux(*)

Pratiquement tout objet recèle, dans son aspect comme dans son fonctionnement ou son utilisation, des occasions de faire vivre des concepts, des outils et des méthodes mathématiques ; ceci de façon d'autant plus riche que l'objet est plus complexe : les mathématiques présentes dans une automobile feraient l'objet non d'un article, mais de un ou plusieurs livres ! À l'opposé, j'ai étudié dans un atelier des journées nationales de Marseille (2013) un objet très simple : une raclette dont l'usure fournit une courbe intéressante(1). À un niveau de complexité intermédiaire, nous étudierons ici un instrument de musique.

Musique et mathématiques ont des rapports étroits, on le sait depuis Pythagore. Les plus connus résident dans le rapport entre hauteur des notes, fréquence du son, définition des gammes ; ainsi que dans les procédés qui régissent le contrepoint. Ces aspects sont lumineusement développés par Bernard Parzysz, dans *Musique et Mathématique*, brochure APMEP nº 53, 1983, épuisée en version papier mais à télécharger librement sur le site de l'APMEP(2), ainsi que dans *Musique et transformations - Analyse d'une œuvre contemporaine* (BV 509). Les lecteurs qui ont une connaissance approfondie de divers domaines des mathématiques (topologie, théorie des groupes, théorie des nœuds, …) ainsi que de la musique contemporaine (dodécaphonisme, tempérament à n sons, gammes à transposition limitée, …) pourront aller plus loin avec ***Mathématique et musique, Journée annuelle de la SMF 2008***, ouvrage recensé dans le BV nº 512. Ici je n'aborderai que des choses beaucoup plus élémentaires, susceptibles de fournir des idées d'exercices ou activités de niveau collège ou lycée, en particulier bien sûr pour les élèves de la filière TMD (Techniques de la Musique et de la Danse) ou ceux ayant choisi l'option facultative Musique ; et je me concentrerai sur un instrument : la contrebasse, et sur une forme de musique : le jazz, dont les structures et les codes ne coïncident qu'en partie avec ceux de la musique classique.

1. Le choix des notes : dénombrements.

Le jazz a pour composante essentielle l'improvisation ; mais, à l'exception notable du « free jazz », l'improvisation est soumise à des règles, des contraintes, qui ne sont pas sans rappeler parfois celles de l'Oulipo en littérature, apportant comme celles-ci autant d'enrichissements que de limitations. Après le *thème*, interprété d'après partition (mais avec quelques variations personnelles), tous les musiciens du groupe improvisent sur la « grille harmonique » correspondant à ce thème, c'est-à-dire une succession d'accords, la plupart du temps de 32 (ou 12) mesures, qui sera répétée ; nous supposerons dans la suite qu'il s'agit de mesures à quatre temps, ce

(*) marc.roux15@wanadoo.fr
(1) http://www.apmep.fr/Ateliers-du-dimanche-matin,5207
(2) http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Math_et_musique.pdf.

qui est le plus fréquent. Sur l'une de ces séquences de 32 mesures (appelée un *chorus*), l'un des musiciens est soliste, tandis que le contrebassiste (si ce n'est pas son tour de « choruser ») lui fournit une assise harmonique et rythmique : en clair, le plus souvent, il joue quatre noires (notes qui durent un temps), qu'il choisit en fonction de l'accord marqué sur la grille (et aussi en fonction de l'accord de la mesure suivante : il faut voir où on va). Et, pour éviter la monotonie, il essaie de varier ses choix, d'où l'intérêt de dénombrer ceux-ci.

Prenons l'exemple d'une mesure de Do septième (noté Do7, ou C7(3)). Les notes de l'accord sont Do, Mi, Sol, Si bémol(4). Selon les cas, cet accord sera considéré comme l'accord de septième de dominante, dans la tonalité Fa majeur, ou bien comme indication du mode mixolydien ; dans les deux cas, l'échelle musicale de référence est Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Sib. Les contraintes de choix des notes sont alors plus ou moins rigoureuses, selon le style pratiqué :

- en « vieux style », ou jazz New Orleans, le contrebassiste se contente souvent d'« arpéger » l'accord, c'est-à-dire de jouer les 4 notes Do, Mi, Sol, Sib, en commençant toujours par la fondamentale Do, et en plaçant la quinte, soit Sol, sur le troisième temps ; d'où un premier exemple de dénombrement des possibilités, très simple, mais où il faut tout de même savoir que la contrebasse a une étendue d'environ trois octaves(5) : trois possibilités pour le premier temps, six pour le deuxième, trois pour le troisième, qautre pour le quatrième, soit déjà 162 lignes de basse théoriquement possibles(6).
- Dans un style un peu plus moderne, on mettra encore Do sur le temps 1 et Sol sur le temps 3, mais sur les temps 2 et 4 n'importe quelle note de la gamme citée ci-dessus, avec répétitions possibles : nombre de possibilités $3 \times (7 \times 3) \times 3 \times (7 \times 3) = 3969$.
- Avançant vers la modernité, on se permettra sur les temps 1 et 3 deux notes quelconques de l'accord (Do, Mi, Sol ou Sib), sur les autres temps, deux notes quelconques de la gamme : nombre de possibilités $(3 \times 4) \times (3 \times 7) \times (3 \times 4) \times (3 \times 7) = 63\,504$.
- Cependant parfois on se limitera au style « walking bass » : 4 notes qui progressent, soit en montant, soit en descendant, sans répétition. Je laisse les calculs au lecteur ; il trouvera un nombre inférieur au précédent !
- Enfin, dans le jazz contemporain, le contrebassiste peut « enrichir l'accord », par exemple par une neuvième diminuée, une quarte augmentée, etc, ou (inclusif) placer sur le dernier temps une note « de passage » (ou « chromatisme »), n'appartenant pas nécessairement à la gamme, ou déterminée non pas par l'accord de la mesure considérée, mais par celui de la mesure suivante ; bref tout est permis, tant que c'est musicalement intéressant. Le nombre de possibilités devient énorme ; on peut néanmoins le

(3) Le jazz, musique d'origine américaine, utilise souvent la notation anglo-saxonne des notes : A = La, B = Si, etc.

(4) En jazz, la septième est, par défaut, mineure ; si on veut un Si bécarre, on notera DoMaj7.

(5) En fait, presque quatre, mais l'extrême aigu ne s'utilise guère en accompagnement.

(6) En pratique, surtout en tempo rapide, une succession de deux notes très éloignées est difficile.

majorer : 12 notes de la gamme chromatique, sur 3 octaves, et sur 4 temps, ça ne fait jamais « que » $(12 \times 3)^4 = 1\,679\,616$!

Bien entendu, l'instrumentiste ne choisit pas une de ces lignes de basse au hasard : il effectue un choix esthétique (instantané), dans lequel interviennent : le style, l'esprit du morceau ; le tempo ; ce qu'il a joué à la mesure précédente ; ce qu'il va jouer à la mesure suivante ; ce que joue le soliste ; la plus ou moins grande difficulté technique des successions de notes envisageables, et son propre niveau instrumental... On trouvera en figure 1 quelques exemples de lignes de basse sur Do7, l'accord de la mesure suivante étant un Fa majeur ("résolution" classique).

Fig 1 : quelques lignes de basse sur Do7 :

Et le soliste ? Qu'il soit contrebassiste ou non, il doit de même choisir ses notes selon des critères voisins, mais moins stricts, avec en plus la liberté rythmique : il peut jouer une ronde, des blanches, des noires, des triolets de noires, des croches, des triolets de croches, des doubles croches, … Notes éventuellement liées entre elles… Et il peut remplacer certaines notes par des silences… Et pour certains instruments (piano, guitare), il peut jouer plusieurs notes à la fois… Situation bien trop complexe pour en faire un dénombrement exhaustif ; à titre d'exemple, on peut dénombrer les mélodies monophoniques tout en croches, une ou plusieurs pouvant être un silence, n'utilisant que des notes de la gamme, sur 3 octaves : $(3 \times 7 + 1)^8 > 5{,}48.10^{10}$ (cinquante quatre milliards…)(7). Comment expliquer, sinon par la paresse intellectuelle et le manque d'imagination, que bien des improvisateurs répètent sempiternellement les mêmes « clichés » ?(8)

2. Jouer, oui, mais jouer juste ? Statistiques.

Sur un piano tous les sons sont fixés, tandis que sur la contrebasse, comme sur le violon ou tout instrument à cordes sans frettes, seuls le sont les quatre sons correspondant à une corde « à vide », c'est-à dire vibrant sur toute sa longueur(9). Pour les autres notes, la hauteur (ou fréquence) est déterminée par le point en lequel le doigt de l'instrumentiste vient presser la corde sur la touche. Prenons un exemple : je veux jouer un Do sur la corde de Sol. Do est situé 5 demi-tons au dessus de Sol, donc selon la gamme tempérée, sa fréquence est celle de Sol multipliée par $2^{\frac{5}{12}}$; la longueur de corde entre le doigt et le chevalet (inversement proportionnelle à la

(7) Et pour un chorus entier (32 mesures), il ne reste plus qu'à élever le nombre de possibilités trouvé à la puissance 32.

(8) Je me range parmi ces musiciens limités !

(9) Du grave à l'aigu : Mi, La, Ré, Sol.

fréquence) doit donc être :

$$(longueur\ totale) \times \left(\frac{1}{2^{\frac{5}{12}}}\right) \cong (longueur\ totale) \times 0.7492.$$

Sur mon instrument, la longueur de corde est 1060 mm ; la distance entre le chevalet et le doigt doit donc être $1060 \times 0,7492 \simeq 794$ mm. J'ai vérifié que, si je pose un doigt à cet endroit, la petite merveille d'électronique appelée « accordeur » confirme que je fais un Do, juste « à très peu près »(10). Chaque fois que je veux jouer un Do (ce Do là, qui est le Do 3), je m'efforce donc de poser le doigt à cet endroit ; le faire avec une exactitude absolue est évidemment un événement de probabilité nulle !(11)

L'accordeur (Fig 2) est surtout utilisé pour accorder les cordes à vide, mais, ceci fait, il permet aussi de vérifier la justesse d'une note quelconque. Lorsqu'il "entend" un son, il affiche le nom de la note la plus proche de ce son ; si la note est "parfaitement"(12) juste, une aiguille (virtuelle) indique 0 et un voyant vert est allumé ; si le son est trop haut par rapport à la note idéale, l'aiguille est déviée vers la droite et un voyant rouge s'allume du côté droit ; idem vers la gauche pour un son trop bas. L'aiguille se déplace devant une graduation en cent(13), de -50 à +50 (graduation par 5 cents). Si la justesse, sans être parfaite, reste acceptable, c'est-à-dire si le logarithme de la fréquence appartient à un intervalle [log2(fT) – 15, log2(fT) + 15] autour de la valeur théorique fT, alors le voyant vert reste allumé en même temps que l'un des voyants rouges. Sur la photo, le son est un Si (B en notation anglo-saxonne) trop bas d'environ 8 cents, mais acceptable (le voyant vert central est allumé, même si ce n'est pas évident sur la photo):

Fig 2.

(10) Dans le calcul ci-dessus sont négligés divers facteurs physiques : rigidité de la corde, étirement dû à la pression qui l'amène au contact de la touche, infimes différences d'épaisseur, …

(11) D'où la devinette connue de tous les contrebassistes : tu es dans le désert, sans eau ; tu vois deux contrebassistes, l'un qui joue faux, l'autre qui joue juste ; auquel vas-tu demander à boire ? Réponse : à celui qui joue faux, car un contrebassiste qui joue juste, c'est un mirage !

(12) Il y a bien sûr un intervalle « de tolérance » dans lequel on considérera la note comme juste ; il a une amplitude proportionnelle à la longueur de corde, donc se rétrécit quand on va dans l'aigu ; d'où la remarque classique : pour la justesse, c'est dans l'aigu que ça devient grave !

(13) Le *cent* la est centième partie de demi-ton tempéré ; la valeur en cent d'un intervalle entre deux fréquences f_1 et f_2 est $1200 \log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$; autrement dit, si f_1 et f_2 diffèrent d'un cent, on a $\frac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{1}{1200}}$.

J’ai ainsi mesuré la justesse du son obtenu, au cours de 200 tentatives de jouer un Do (résultats arrondis à 5 *cents* près). J’ai ensuite, grâce au tableur de GeoGebra, réparti ces mesures en cinq catégories : juste (voyant vert seul allumé), acceptable-bas (voyant vert et voyant rouge gauche allumés), faux-bas (voyant rouge gauche seul allumé), et de même acceptable-haut et faux-haut. Voir les résultats en figure 3 ; ils ne ressemblent que de loin à la courbe gaussienne que l’on pouvait attendre ! Il est vrai que les essais ne sont pas indépendants : après avoir joué une note trop haute, on a tendance à corriger … et à jouer trop bas ! (Et réciproquement). Je suis quasi-certain qu’un instrumentiste plus exercé et plus talentueux obtiendrait, en particulier, un écart-type bien inférieur au mien.

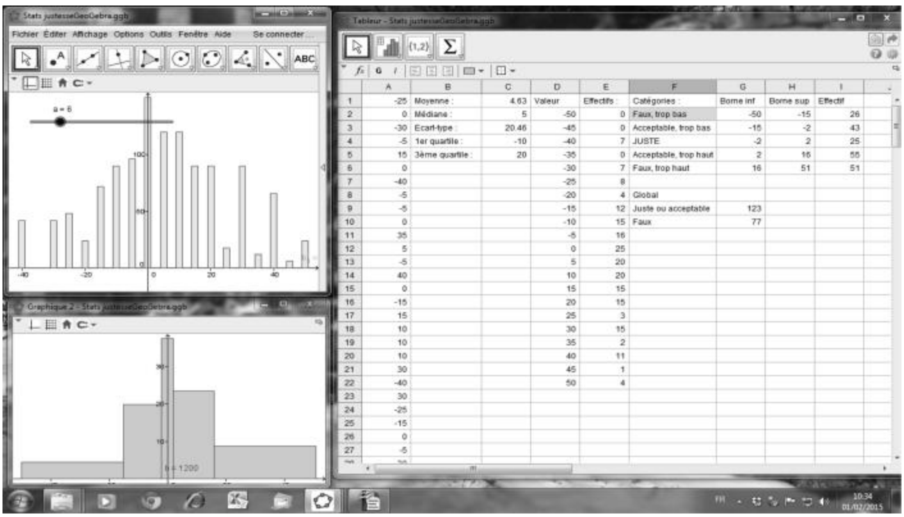


Fig 3.

La confection de la figure 3 est l’occasion de découvrir ou réactiver diverses fonctionnalités de GeoGebra (les données brutes sont entrées dans la colonne A) : NbSi pour remplir les colonnes E et I ; affichage sur plusieurs fenêtres ; commande « Barres » pour le graphique en haut à gauche ; pour le graphique du bas, j’ai tapé :

Histogramme[{-50,-15 ,-2,2,16,51},A1:A200,True,a}(14)

La première liste est la liste des bornes de classes, la deuxième celle des données brutes ; « True » signifie que le graphique tient compte de la densité, autrement dit que chaque effectif est divisé par l’amplitude de la classe, de sorte que ce sont les aires des rectangles qui sont proportionnelles aux effectifs, et non les hauteurs, ce qui arriverait en mettant « False » ; l’ajout, facultatif, de « a » permet de régler l’échelle par un curseur. Ces deux graphiques se construisent automatiquement à partir des données brutes, le tableau des valeurs et effectifs n’est pas indispensable.

(14) On remarquera que j’ai « triché » sur les bornes afin d’avoir en fait, pour des raisons de symétrie, l’intervalle fermé [-2,2] et les intervalles fermés à droite]2,15] et]15,50] ; en effet le logiciel, par défaut, considère les intervalles fermés à gauche ; on peut choisir qu’ils soient tous fermés à droite, avec la commande HistogrammeDroite.

3. Le swing : fractions, pourcentages, nombre d’or.

Personne n’est parvenu à donner une définition rigoureuse du *swing*, cette pulsation rythmique propre au jazz et à certaines musiques qui s’en inspirent ; il y entre plusieurs composantes, comme les fortes différences d’accentuation de notes successives, mais un élément essentiel est l’allongement de la première des deux croches de chaque temps (et le raccourcissement correspondant de la seconde)(15). Cet allongement est variable selon les interprètes, l’époque, le style. Le partage du temps peut aller de (1/2 ; 1/2) (exécution « normale » : on parle alors de jazz « binaire ») à (3/4 ; 1/4) (deux croches se lisent alors comme croche pointée – double croche ; on entend ceci dans le boogie-woogie), en passant par (2/3 ; 1/3), partage fréquemment adopté approximativement, ce qui vaut à une grande partie de la production jazzistique l’appellation de musique ternaire. Un logiciel d’édition musicale comme Harmony Assistant(16) permet de régler à volonté cet allongement, grâce à un curseur gradué de 0 à 100, qui correspond au pourcentage d’augmentation de la durée de la première croche. Ainsi le partage (2/3 ; 1/3) correspond au curseur placé sur 33 ; à l’audition, on peut estimer le résultat un peu trop « sautillant ». D’où une idée d’exercice de niveau collège : comment régler le curseur pour que le temps soit partagé selon la proportion d’or ? Après calcul, et expérimentation sur le logiciel, on obtient une qualité de swing tout à fait convenable !

4. L’objet contrebasse : géométrie.

Découragé par la difficulté à choisir les « bonnes » notes autant qu’à les jouer justes, le musicien-matheux n’a plus qu’à s’asseoir et contempler ce bel objet, aux courbes harmonieuses, qu’est une contrebasse (Fig 4). Une première notion mathématique saute aux yeux : la symétrie (par rapport à un plan pour l’objet en trois dimensions, par rapport à une droite pour sa représentation plane vue de face). Toutefois, il n’y a symétrie qu’à condition d’exclure la tête de l’instrument, d’où émergent les quatre clefs d’accordage, décalées : ici on peut évoquer la symétrie-glissée, si on néglige le léger rétrécissement vers le haut (Fig 5).

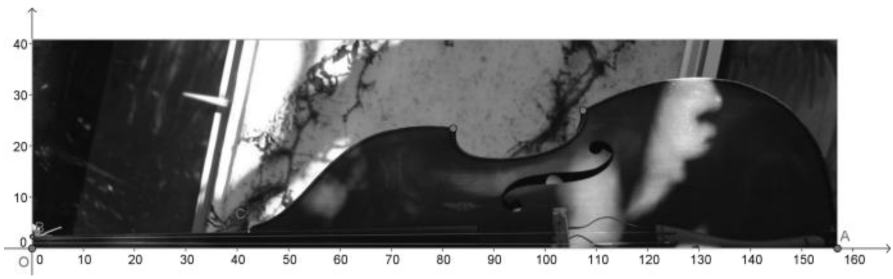

Fig 4


Fig 5

(15) Procédé d'ailleurs déjà utilisé dans la musique baroque.

(16) Logiciel payant mais avec possibilité d’essai gratuit. Téléchargement à l’adresse http://www.myriad-online.com/cgibin/download.pl?prod=HA&lang=FR

Ces remarques rudimentaires faites, il est naturel de chercher à modéliser ces formes sensuelles. Pour ce faire, j'ai pris une photo de l'objet, appareil photo bien centré, et de loin, au téléobjectif, pour minimiser les déformations dues à la perspective. J'ai recadré l'image, n'en gardant que la moitié (puisqu'il y a symétrie) et en éliminant la tête, aux formes sculptées trop compliquées. J'ai intégré cette image dans un fichier GeoGebra en faisant coïncider l'axe de symétrie de la contrebasse avec l'axe (Ox), le milieu du sillet (appui des cordes, en haut du manche) avec l'origine, et la base de la caisse au point A(157, 0) puisque sa distance au sillet est 157 cm (fig 6) :



Clairement, la courbe qui limite l'image de la contrebasse se décompose en quatre arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CK}$, $\overset{\frown}{KT}$, $\overset{\frown}{TA}$. Nous allons tenter de modéliser chacun par une équation, de préférence de la forme $y = f_k(x)$ ($k \in \{1, 2, 3, 4\}$), pour, ensuite, assimiler la courbe entière à la représentation d'une fonction f définie par morceaux ; ou bien trouver une paramétrisation de chacun des arcs.

La partie $\overset{\frown}{BC}$ (le bord du manche) ne nous pose guère de problème : c'est un segment de droite, dont le logiciel nous donne illico une équation : $y = 0.02427x + 2.31261$; nous posons donc : $f_1(x) = 0.02427x + 2.31261$.

Pour les trois autres arcs, nous disposons de plusieurs méthodes mathématiques applicables avec GeoGebra ; dans tous les cas, nous plaçons sur chacun des arcs un certain nombre de points.

4.2 La commande « conique passant par 5 points » : appliquée aux arcs $\overset{\frown}{TA}$ et $\overset{\frown}{KT}$ elle donne de bons résultats (Fig 7 et 8) :

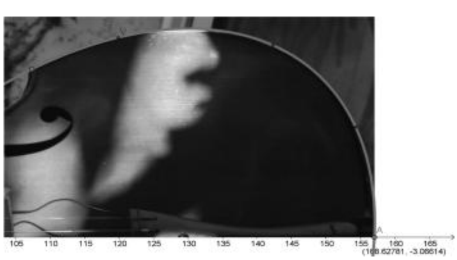


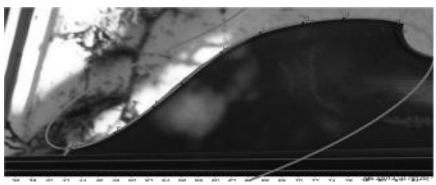
Fig 7

Fig 8

Dans chaque cas on obtient une équation de la forme $g(x, y) = 0$; pour la mettre sous la forme $y = f(x)$, il suffit de résoudre une équation du second degré en y ; mais les coefficients étant loin d'être simples, le recours à un logiciel de calcul formel est indispensable ; celui intégré à GeoGebra fait très bien l'affaire (syntaxe : *Résoudre*[*équation*, *y*] ; voir résultats plus bas)

Mais pour l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{CK}}$, inutile d'essayer une conique puisqu'il admet visiblement deux points d'inflexion.

4.3 La commande CourbeImplicite : le nombre de points doit être de la forme $\dfrac{n(n+3)}{2}$, pour une courbe de degré n. Un essai d'application à l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{CK}}$ est très décevant : courbes extravagantes, avec des branches infinies, souvent en plusieurs morceaux, qui ne ressemblent guère à la contrebasse !… Si on supprime la petite portion $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$, assimilable à un segment, avec 9 points sur $\overset{\frown}{\mathrm{DK}}$ (y compris les extrémités) on arrive à la cubique de la figure 9, qui est acceptable :

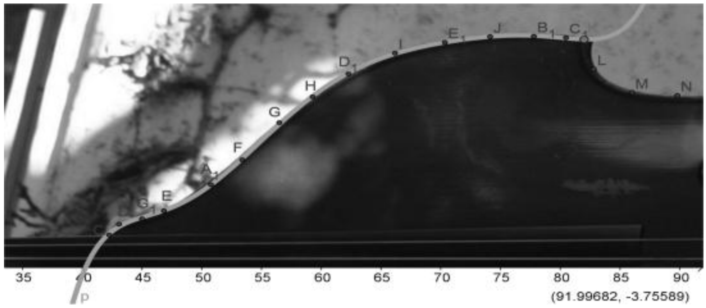


Mais si on cherche à exprimer y en fonction de x, pour l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{DK}}$, le calcul formel de GeoGebra déclare forfait ; transportée dans un autre logiciel (que je ne citerai pas pour ne pas faire de publicité à un logiciel payant[17]), cette équation du 3ème degré donne logiquement, et comme la figure 10 le fait prévoir, trois expressions possibles, effroyablement compliquées, à base de sinus et ArcCos… Laissons tomber !

4.4 Les commandes « ajustement » : contrairement au cas précédent, elles ne fournissent pas des courbes passant exactement par les points sélectionnés, mais des fonctions de type donné qui s'approchent au mieux du « nuage de points ». La panoplie offerte par GeoGebra est vaste : ajustement linéaire, bien sûr, mais aussi exponentiel, logarithmique, sinusoïdal, puissance, logistique, polynomial (de degré quelconque)[18]. La forme de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{CK}}$ permet d'éliminer plusieurs de ces types. Après de longs essais et tâtonnements, il s'avère qu'un ajustement polynomial de degré 7 est tout-à-fait satisfaisant à l'œil, y compris pour le petit arc $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ (fig 10) :

(17) Il existe des logiciels de calcul formel gratuits et performants, par exemple Xcas. Le lecteur voudra bien m'excuser de ne pas les dominer…

(18) Sans oublier le mystérieux *AjustCroissance*, qui donne la même courbe que *AjustExp*, mais avec une expression différente :$a.b^x$ au lieu de $a.e^{cx}$.



On obtient une modélisation correcte du profil de la contrebasse en « recollant les morceaux » obtenus dans 4.2 et 4.4 :

$f_1(x) = 0.02427x + 2.31261$;

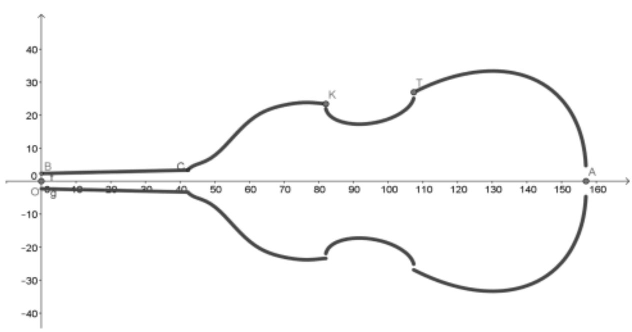
$f_2(x) = 0.000000009675211x^7 - 0.000004371027828x^6 + 0.000838637332999x^5 - 0.088509962933263x^4 + 5.54481894282347x^3 - 206.01741833040464x^2 + 4201.441979510867x - 36271.458771634934$

$$f_3(x) = \frac{35630x - \sqrt{\left(-20534795324x^2 + 3890086029340x - 180893418064607\right)} + 3132241}{267072}$$

$$f_4(x) = \frac{87671x - \sqrt{\left(-31854938919x^2 + 693688443672x - 303734565706500\right)} - 13360612}{172714}$$

f = Si[0 ≤ x < x(C), f_1,Si[x(C) ≤ x < x(K), f_2,Si[x(K) ≤ x < x(T), f_3,Si[x(T) ≤ x ≤ x(A),f_4]]]]

On peut compléter par symétrie ($g = -f$), cacher la photo de départ, et voici un premier modèle de contrebasse ! (fig 11)



4.5 La commande spline.

On appelle *fonction spline d'interpolation* (*d'ordre k relatif aux n abscisses x_i*) une « fonction réelle σ sur un intervalle $[a, b]$, $(a < x_1 < \ldots < x_n < b)$ dont les restrictions à $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 1, \ldots, n - 1$ sont des polynômes de degré $2k - 1$, dont les restrictions à $[a, x_1]$ et $[x_n, b]$ sont des polynômes de degré $k - 1$ et telles que la dérivée d'ordre $(2k - 2)$ de σ soit continue »[19].

GeoGebra semble suivre une définition un peu différente mais correspondant à la même idée de courbe de lissage, avec aux points de raccordement continuité des dérivées jusqu'à un certain ordre : la commande *spline*[*liste de n points, k*] renvoie, pour $3 \leq k \leq n$, une courbe paramétrée passant, dans l'ordre, par tous les points de la liste[20], dont les coordonnées sont des fonctions polynomiales par morceaux, de degré k, du paramètre t, t variant de 0 à 1, avec continuité des dérivées jusqu'à l'ordre $k - 1$.

Une spline ne peut pas avoir de point anguleux ; pour reproduire la courbe de la contrebasse il est donc nécessaire de traiter séparément chacun des arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CK}$, $\overset{\frown}{KT}$, $\overset{\frown}{TA}$. La figure 12 montre qu'avec suffisamment de points, et $k = 3$, on obtient une excellente concordance :

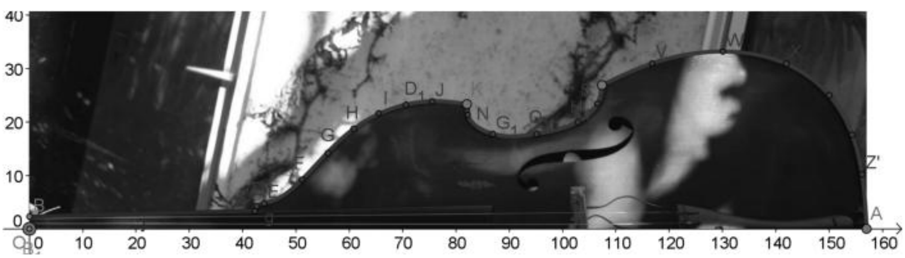
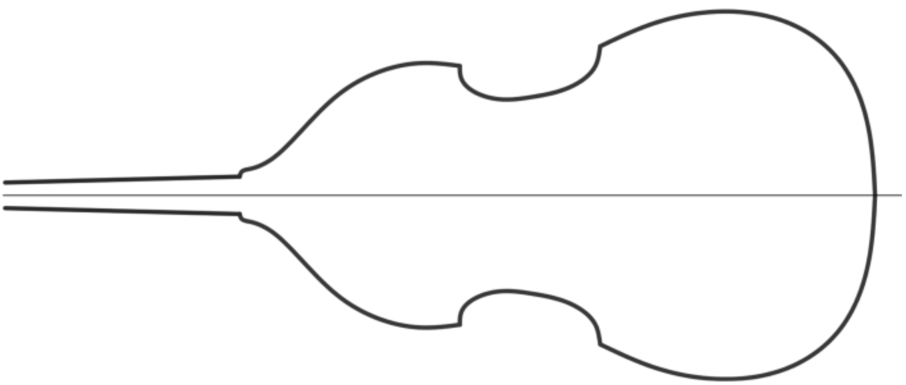


Fig 12.

En complétant par symétrie et en cachant la photographie et les points de construction, on obtient un deuxième modèle de contrebasse (Fig 13) :



4.6 Les courbes de Bézier. Ces courbes, définies comme lieu d'un barycentre de n points, et très utilisées en CAO, pourraient certainement être utilisées ici. Je n'en parlerai pas, d'une part pour éviter les longueurs superflues, d'autre part parce qu'il

(19) Approximation et optimisation, de Pierre-Jean Laurent (Hermann 1972)

(20 Avec possibilité de répétition de points, donc de courbe fermée et/ou croisée ; et ceci fonctionne en 3D !

n'existe pas dans GeoGebra de commande adéquate (mais on pourrait probablement concevoir un Outil qui les tracerait).

4.7. De l'observation à la créativité. Les contrebasses n'ont pas toutes la même forme ; toutes ont les « épaules tombantes » (géométriquement : l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{CK}}$ est presque tangent au segment [BC], alors que sur un violon ou un violoncelle il lui serait presque perpendiculaire) car elle font partie de la famille des violes, et non de celle des violons. Mais chez celle utilisée ici, cette caractéristique est amplifiée, dans la tradition des luthiers de Mirecourt (Vosges). Ceci revient à dire que les points des arcs $\overset{\frown}{\mathrm{CK}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{KT}}$ ont une ordonnée plus petite que pour d'autres contrebasses. Pour obtenir à la demande une silhouette plus trapue, partant de l'une ou l'autre des modélisations , il suffit de multiplier, sur cette région, l'ordonnée des points par une fonction $1 + u$ (avec u positive). Pour qu'il y ait raccordement, il faut que u soit nulle en C et T ; et j'ai choisi que u atteigne au milieu de l'intervalle un maximum réglable par un curseur k. Partant de la modélisation par les splines (Fig 15), j'ai posé successivement :

$d = x(\mathrm{T}) - x(\mathrm{C})$; $x_0 = \dfrac{x(\mathrm{C})+x(\mathrm{T})}{2}$; $u = (x - x_0)^2 \times \left(\dfrac{4a}{d^2}\right) + a$;A_1 point de $\overset{\frown}{\mathrm{CK}}$; B_1 point de $\overset{\frown}{\mathrm{KT}}$; $\mathrm{A}_2 = (x(\mathrm{A}_1), y(\mathrm{A}_1) \times (1 + u(x(\mathrm{A}_1))$; $\mathrm{B}_2 = (x(\mathrm{B}_1), y(\mathrm{B}_1) \times (1 + u(x(\mathrm{B}_1))$; B_3, C_3 symétriques de B_2 et C_2 par rapport à (Ox) ; et j'ai fait tracer les lieux de B_2, C_2, B_3, C_3.

En réglant a à la valeur 0,20, on obtient ceci (Fig 14), qui correspond mieux au surnom « la grosse » souvent donné à mon instrument favori.

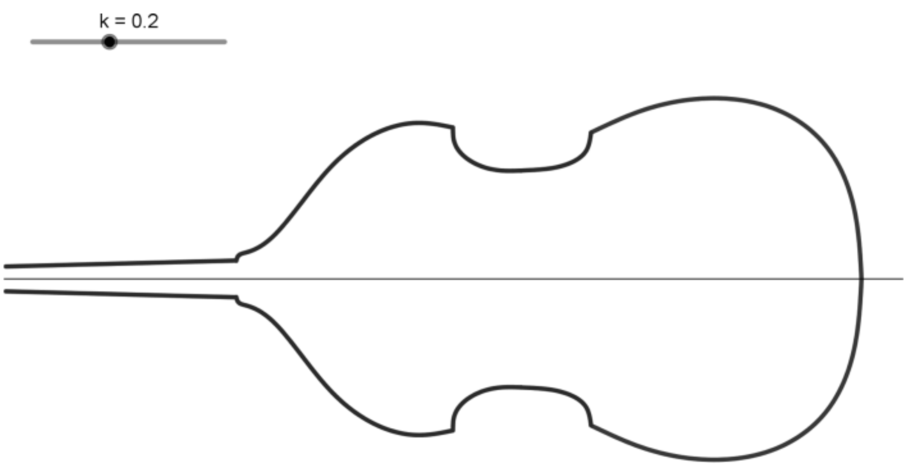


Fig 14.

5. Commentaires.

De ce qui précède, je voudrais extraire quelques idées-force, qui seraient à mettre en relief dans des activités en classe :

– Un objet familier peut être une motivation pour la découverte ou la réactivation de connaissances mathématiques dans des domaines très divers.
– Toute modélisation comporte une large part d'arbitraire, de choix subjectif ; elle est soumise à des contraintes, liées aux connaissances, aux possibilités offertes par les logiciels, au niveau de simplicité recherché, etc.
– La vérification de la conformité du modèle mathématique à la réalité qu'il est censé représenter est souvent hors du champ des mathématiques(21).
– Les logiciels de calcul formel élargissent le champ des possibles, et permettent de se rapprocher du réel : en classe les coefficients d'une équation du second degré sont entiers ou très simples, "dans la vraie vie" il faut parfois prendre huit ou quinze décimales, ce qui ne change rien en théorie, mais tout en pratique !
– La modélisation nécessite un minimum de culture mathématique : des courbes concrètes de la contrebasse on ne ferait rien si elles n'évoquaient pas instantanément des types d'équations classiques (coniques, logistiques,...), les outils existants resteraient lettre morte si, justement, on ne savait pas qu'ils existent.

(21) Même s'il existe en statistiques des tests de représentativité (Khi deux, …).