Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

* * * * *

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 517–1 (Michel Lafond) (Dijon)

On note $\lfloor \ \rfloor$ la fonction partie entière. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \left\lfloor n^{1/k} \right\rfloor = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(k)} \right\rfloor.$$

Problème 517–2 (Michel Lafond (Dijon)

Trouver la valeur exacte de la solution réelle positive de l'équation

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)=144.$$

Problème 517–3

Trouver tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ induisant une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 504-3 (Franck Gautier, Pérignat Lès Sarlieves)

On désigne par $\mathrm{D} = \mathrm{B}(0, 1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 du plan. Pour un chemin $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathrm{D} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$ de classe $\mathcal{C}^1$, on définit l'énergie de Φ par

$$\mathrm{E}(\Phi) = \int_0^1 \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{\left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right)^2} \mathrm{d}t.$$

Déterminer l'ensemble des chemins reliant le centre 0 à un point $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{D}$ qui minimisent cette énergie.

Solutions de Franck Gautier (Pérignat Lès Sarlieves) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Il est tentant de passer en coordonnées polaires, avec des coordonnées (ρ,θ) de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui peut poser un problème lorsque le point est à l'origine. Dans la suite de ce texte, on supposera donc que l'on peut écrire

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = \rho(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

avec ρ, $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ continues de classe $\mathcal{C}^1$. En omettant la variable t,

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

En dérivant,

$$\begin{cases} x' = \rho'\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\theta' \\ y' = \rho'\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)\theta' \end{cases}$$

Un calcul donne

$$\mathrm{E}(\Phi) = \int_0^1 \frac{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2\,\theta'(t)^2}{\left(1-\rho(t)^2\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\mathrm{E}(\Phi) \geq \int_0^1 \frac{\rho'(t)^2}{\left(1-\rho(t)^2\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathrm{E}(\Phi) \geq \left(\int_0^1 \frac{\rho'(t)}{1-\rho(t)^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \left(\int_0^1 \mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^1 \frac{\rho'(t)}{1-\rho(t)^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

soit

$$\mathrm{E}(\Phi) \geq \left(\left|\operatorname{argth}(\rho(t))\right|_0^1\right)^2 = \operatorname{argth}(\mathrm{OM}_0)^2.$$

Il y égalité si et seulement si d'une part $\theta' = 0$ et d'autre part s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela signifie que θ est constante (les courbes considérées sont des segments de droite) et que l'application $\dfrac{\rho'}{1-\rho^2}$ est également constante, autrement dit qu'il existe α tel que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\rho(t) = \operatorname{th}(\alpha t).$$

Et effectivement, pour φ, $\alpha \in \mathbb{R}$, en posant

$$\Phi(t) = \begin{cases} x(t) = \operatorname{th}(\alpha t)\cos(\varphi) \\ y(t) = \operatorname{th}(\alpha t)\sin(\varphi) \end{cases}$$

on vérifie facilement que

$$\mathrm{E}(\Phi) = \alpha^2.$$

Or

$$x(1)^2 + y(1)^2 = \operatorname{th}(\alpha)^2 = \mathrm{OM}_0{}^2,$$

donc $\alpha = \pm \operatorname{argth}(\mathrm{OM}_0)$, ce qui donne le minimum attendu.

Problème 506-1 (Jean-Louis Trinquand, Clermont-Ferrand)

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(1) > 0$ et pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(m^2 + n^2\right) = f(m)^2 + f(n)^2.$$

Trouver f.

Solutions de Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Bernard Collignon (Coursan), Moubinool Omarjee (Lycée Henri IV, Paris), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Ce sujet a été posé au Concours Général de Mathématiques de 1994. On commence par calculer quelques valeurs :

$$f(0) = f(0+0) = f(0)^2 + f(0)^2 = 2f(0)^2.$$

Et comme $f(0)$ est un entier, on en déduit que $f(0) = 0$. Puis

$$f(1) = f(1+0) = f(1)^2 + f(0)^2 = f(1)^2.$$

L'énoncé précise $f(1) > 0$, donc $f(1) = 1$. Et

$$f(2) = f\left(1^2 + 1^2\right) = f(1)^2 + f(1)^2 = 2.$$

On remarque ensuite que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(n^2\right) = f\left(n^2 + 0\right) = f(n)^2 + f(0)^2 = f(n)^2.$$

$$f\left(n^2 + 1\right) = f(n)^2 + f(1)^2 = f(n)^2 + 1.$$

et

$$f\left(2n^2\right) = f\left(n^2 + n^2\right) = 2f(n)^2.$$

En prenant $n = 2$ dans ces trois formules, on obtient

$$f(4)=f(2)^2=4.$$

$$f(5)=f\left(2^2+1\right)=f(2)^2+1=5.$$

$$f(8)=f\left(2\times 2^2\right)=2f(2)^2=8.$$

Avec $n = 4$

$$f(16)=f\left(4^2\right)=f(4)^2=16.$$

$$f(17)=f\left(4^2+1\right)=f(4)^2+1=17.$$

Avec $n = 5$,

$$f(25)=f(5)^2=25.$$

$$f(26)=f\left(5^2+1\right)=f(5)^2+1=26.$$

$$f(50)=2f(5)^2=50.$$

On peut alors calculer $f(3)$:

$$25=f(25)=f\left(3^2+4^2\right)=f(3)^2+f(4)^2=f(3)^2+16,$$

et toujours parce que f est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$f(3) = 3.$$

On a aussi

$$f(9)=f(3)^2=9.$$

puis

$$f(10)=f\left(3^2+1\right)=f(3)^2+1=10.$$

On a encore besoin de $f(6) = 6$ pour conclure. Pour cela, on écrit

$$10^2 = 6^2 + 8^2,$$

donc

$$10^2=f(10)^2=f(6)^2+f(8)^2=f(6)^2+8^2,$$

donc

$$f(6) = 6.$$

Maintenant, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n=(n+2)^2-(n-2)^2,$$

donc

$$(2n+1)^2+(n-2)^2=(2n-1)^2+(n+2)^2, \qquad (1)$$

et

$$(2n+2)^2-(2n-2)^2=16n=(n+4)^2-(n-4)^2,$$

ce que l'on écrit

$$(2n+2)^2+(n-4)^2=(2n-2)^2+(n+4)^2. \qquad (2)$$

On est alors en mesure de montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$. C'est initialisé pour $n \in [0, 6]$ et l'on suppose le résultat établi jusqu'à un certain entier $N - 1 \geq 6$. On peut écrire $N = 2n + 1$ avec $n \geq 3$ ou $N = 2n + 2$ avec $n \geq 3$ (et c'est pour cela que l'on avait besoin de calculer $f(6)$).
Dans le premier cas, la relation (1) donne

$$f\left((2n+1)^2+(n-2)^2\right)=f\left((2n-1)^2+(n+2)^2\right),$$

soit encore

$$f(2n+1)^2+f(n-2)^2=f(2n-1)^2+f(n+2)^2.$$

On peut utiliser l'hypothèse de récurrence, car les entiers $n - 2$, $2n - 1$, $n + 2$ sont strictement inférieurs à $N = 2n + 1$. Ainsi,

$$f(2n+1)^2+(n-2)^2=(2n-1)^2+(n+2)^2,$$

soit, en utilisant de nouveau (1),

$$f(2n+1)=2n+1.$$

Le cas où $N = 2n + 2$ découle de (2) de la même manière en remarquant que les entiers $n - 2$, $2n - 2$, $n + 4$ sont tous strictement inférieurs à $2n + 2$.

Problème 506-3 (Michel Lafond, Dijon)

Montrer que l'on définit une bijection de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$f(a,b,c)=\frac{1}{6}\left((a+b+c)^3+3(a+b+c)^2+3(b+c)^2+2a+5b+11c\right).$$

Solutions de Maurice Bauval (Versailles), Bernard Collignon (Coursan), Marie-Nicolas Gras (Le Bourg d'Oisans), Jean Gounon (Chardonnay), Michel Lafond (Dijon) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

On remarque que

$$f(a,b,c)=\frac{1}{6}\left((a+b+c)^3+3(a+b+c)^2+2(a+b+c)+3(b+c)^2+3b+9c\right),$$

et on en déduit que

$$f(a,b,c)=\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c+2)}{6}+\frac{(b+c)(b+c+1)}{2}+c.$$

Sur cette formule, il est clair que f est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit N un entier positif ou nul. Puisque la fonction $u\in\mathbb{N}\mapsto\frac{u(u+1)(u+2)}{6}$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, il existe un unique entier $k\geq 0$ tel que

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6}\leq \mathrm{N}<\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

On pose $n=\mathrm{N}-\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$. On a alors

$$0\leq n<\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}-\frac{k(k+1)(k+2)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Il existe donc un unique entier $\ell\in[0,k]$ tel que

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2}\leq n<\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}.$$

On pose $m=n-\frac{\ell(\ell+1)}{2}$. On a alors

$$0\leq m<\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}-\frac{\ell(\ell+1)}{2}=\ell+1.$$

Il existe donc des entiers $0\leq m\leq \ell\leq k$ tels que

$$\mathrm{N}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{\ell(\ell+1)}{2}+m.$$

On a à résoudre dans $\mathbb{N}^3$ le système

$$\begin{cases} a+b+c=k \\ b+c=\ell \\ c=m \end{cases}.$$

On trouve

$$\begin{cases} a=k-l\in\mathbb{N} \\ b=l-m\in\mathbb{N} \\ c=m\in\mathbb{N} \end{cases}.$$

Ainsi, tout entier N s'écrit de manière unique $f(a, b, c)$ avec $a, b, c\in\mathbb{N}$.