Exercices de-ci de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 518 – 1 : Jean-Christophe Laugier – Rochefort

On numérote au hasard de 1 à 8 les sommets d'un cube. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas deux sommets adjacents portant des numéros consécutifs (1 et 8 sont considérés ici consécutifs) ?

Exercice 518 – 2 : *pour nos élèves*

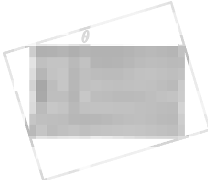
A – *transmis par Raphaël Sinteff—Nancy*
Soit la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n + 8 \end{cases}$$

1. Pour $n \geq 2$, déterminer les trois premiers chiffres en partant de la droite du terme général u_n.
2. Déterminer le nombre de chiffres du terme u_{2016}.

B – *pioché de-ci, de-là*
Pour lequel des ces deux assemblages de quatre disques unité, la ligne d'enceinte est-elle la plus courte ?

Exercice 518 – 3 : Paul-Alain Bonvert – Alfa du Ginseng



Un rectangle de longueur L et de largeur l étant donné, déterminer le plus grand rectangle circonscrit (en aire).

Exercice 518 – 4 : Michel Lafond – Dijon *Courbe en polaire*

Soit $n > 2$ un entier.

On pose $\omega = \dfrac{\pi(n+2)}{2n}$ et on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.
À quoi ressemble la courbe plane d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \frac{\sin\omega}{\sin\left(\omega - \theta + \dfrac{2\pi}{n}\left\lfloor \dfrac{n\cdot\theta}{2\pi} \right\rfloor\right)} \qquad \theta \in [0,2\pi] \quad ?$$

Solutions

Exercice 516 – 1 : Paul-Alain Bonvert – Alfa du Ginseng *ils sont fous ces anglo-saxons !*

Pour les nombres rationnels positifs l'écriture $a\dfrac{b}{c}$ du nombre $a + \dfrac{b}{c}$, dans laquelle a, b et c sont des entiers naturels avec $b < c$, permet la curieuse égalité suivante :

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Donner une méthode de génération d'autres exemples pour lesquels $\sqrt{a\dfrac{b}{c}} = a\sqrt{\dfrac{b}{c}}$.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Sarrouy (Mende), Daniel Văcaru (Pitești), Romain Charton (Besançon), Raphaël Sinteff (Nancy), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon).

– Voici la solution de Michel Sarrouy.

Posons $r = \dfrac{b}{c}$, r est un rationnel quelconque compris au sens strict entre 0 et 1. Le problème consiste à chercher ce rationnel r et l'entier naturel a tels que $\sqrt{a+r} = a\sqrt{r}$ qui, vues les conditions, équivaut à $a + r = a^2 r$.

Notons que a ne peut prendre la valeur 1. La dernière égalité donne $r = \dfrac{a}{a^2-1}$ et, comme a vaut au moins 2, r est bien compris entre 0 et 1.
En conclusion, a peut prendre n'importe quelle valeur entière au moins égale à 2 et les entiers b et c sont donnés par $b = k \times a$ et $c = k \times (a^2 - 1)$ pour k entier naturel non nul.

Exercice 516–2 : *pour nos élèves*

A – *transmis par Vincent Thill*
Peut-on trouver cinq entiers naturel consécutifs qui vérifient l'égalité

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 \ ?$$

B –On assemble alternativement des carrés et des heptagones réguliers comme le montre la figure ci-contre.
Si on poursuit cet assemblage en tournant toujours de la même façon, la boucle se fermera-t-elle exactement ?
(si oui, combien y aura-t-il de carrés ? d'heptagones ?)

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Sarrouy (Mende), Daniel Văcaru (Pitești), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Maurice Bauval (Versailles), Jacques Chayé (Poitiers), Michel Lafond (Dijon).

A – Voici la solution de Daniel Văcaru.

Considérons $\mathrm{A} = \{i+1, i+2, i+3, i+4, i+5\}$ cinq entiers consécutifs.

Parmi les dix équations possibles, puisque l'ordre n'est pas précisé, seulement deux aboutissent à une solution en nombres entiers naturels :

• $(i+1)^2 + (i+2)^2 + (i+3)^2 = (i+4)^2 + (i+5)^2$

$$\Rightarrow 3i^2 + 12i + 14 = 2i^2 + 18i + 41 \Rightarrow i^2 - 6i - 27 = 0$$

et pour $i = 9$, $\mathrm{A} = \{10, 11, 12, 13, 14\}$ avec $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$ et $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$.

• $(i+1)^2 + (i+3)^2 + (i+4)^2 = (i+2)^2 + (i+5)^2$

$$\Rightarrow 3i^2 + 16i + 26 = 2i^2 + 14i + 29 \Rightarrow i^2 + 2i - 3 = 0$$

et pour $i = 1$, $\mathrm{A} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ avec $2^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 16 + 25 = 45 = 9 + 36 = 3^2 + 6^2$.

Remarque. Michel Lafond propose le prolongement suivant.

Plus généralement si on cherche à résoudre :

$$(a+1)^2 + (a+2)^2 + \cdots + (a+p)^2 = (a+p+1)^2 + (a+p+2)^2 + \cdots + (a+p+q)^2$$

avec $a \geq 0$; $p > q \geq 1$,
on trouve d'une part l'infinité de solutions :

$$\left(2k^2+k\right)^2 + \cdots + \left(2k^2+2k\right)^2 = \left(2k^2+2k+1\right)^2 + \cdots + \left(2k^2+3k\right)^2,$$

c'est-à-dire pour $k = 1$: $3^2 + 4^2 = 5^2$,

pour $k = 2$: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$,

pour $k = 3$: $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$, etc.

et d'autre part des solutions sporadiques, classées selon $p + q$ croissant :

p	q	$p+q$	
17	8	25	$18^2+\cdots+34^2=35^2+\cdots+42^2=11\,900$
35	10	45	$4^2+\cdots+38^2=39^2+\cdots+48^2=19\,005$
39	13	52	$12^2+\cdots+50^2=51^2+\cdots+63^2=42\,419$
51	25	76	$60^2+\cdots+110^2=111^2+\cdots+135^2=379\,525$
93	39	132	$67^2+\cdots+159^2=160^2+\cdots+198^2=1\,254\,539$
127	37	164	$16^2+\cdots+142^2=143^2+\cdots+179^2=963\,295$
382	191	573	$474^2+\cdots+855^2=856^2+\cdots+1046^2=173\,321\,231$

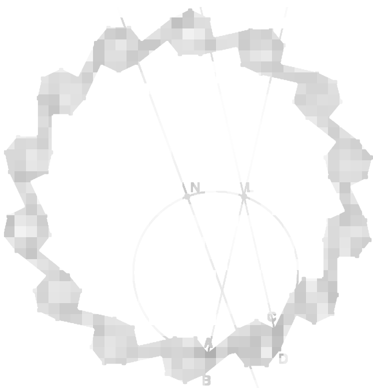
etc.

B – Voici la solution de Maurice Bauval.

La boucle se refermera exactement. Il y aura 14 heptagones et 14 carrés :

Lorsqu'on donne deux segments [AB] et [CD] de même longueur, non parallèles, il existe une rotation plane $\mathcal{R}$ qui vérifie $\mathcal{R}(A) = C$ et $\mathcal{R}(B) = D$. Le centre N de cette rotation est le point commun aux deux médiatrices de [AC] et [BD], ainsi qu'aux deux cercles circonscrits à A, C, L et B, D, L, où L est le point d'intersection des droites (AB) et (CD). L'angle de cette rotation est égal à l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Si cet angle vaut $2\pi/n$ où n est un entier, $\mathcal{R}^n$ = Identité.
Dans notre cas cet angle vaut $\pi/7$ d'où $\mathcal{R}^{14}$ = Identité.

Remarque La boucle se refermerait de la même façon si à l'heptagone on avait accolé, à la place d'un carré, un rectangle, ou même un parallélogramme comme le montre la figure suivante[1].



(1) Cette figure me coupe le sifflet …

Exercice 516–3 : Jean-Christophe Laugier – Rochefort

1) Quel est le nombre maximal de chiffres égaux, distincts de zéro, pouvant terminer l'écriture décimale du carré d'un entier ?
2) Montrer que l'écriture décimale d'un cube peut se terminer par un nombre arbitraire de chiffres égaux, distincts de zéro.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Maurice Bauval (Versailles), Michel Lafond (Dijon).

Voici la solution de Michel Lafond.

1) Quel est le nombre maximal de chiffres égaux, distincts de 0, pouvant terminer l'écriture décimale d'un carré parfait ?

Réponse : c'est 3 avec par exemple $38^2 = 1444$.

Les 22 terminaisons possibles modulo 100, d'un carré parfait (obtenues par balayage) sont :
00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.
Si on exclut 00, seule la terminaison 44 est du type *aa*, et elle se produit pour et seulement pour les carrés des entiers congrus à ± 12 ; ± 38 mod 100.
Le problème se ramène donc à trouver le nombre maximal de 4 pouvant terminer l'écriture décimale d'un carré parfait.
D'après ce qui précède, si on veut trois 4 en terminaison, les candidats sont les entiers qui se terminent par *12, *38, *88 ou *62. Soit on procède par balayage, soit on met en équation :

$(100\,k \pm 12)^2 = 10\,000\,k^2 \pm 2400\,k + 144 \equiv 444 \bmod 1000$ qui se simplifie :

$\pm 400\,k \equiv 300 \bmod 1000$ donc $\pm 4\,k \equiv 3 \bmod 10$, impossible, car $\pm 4\,k - 3$ est impair.

$(100\,k \pm 38)^2 = 10\,000\,k^2 \pm 7600\,k + 1444 \equiv 444 \bmod 1000$ qui se simplifie :

$\pm 600\,k \equiv -1000 \bmod 1000$ donc

$\pm 600\,k \equiv 0 \bmod 1000 \Leftrightarrow \pm 6\,k \equiv 0 \bmod 10 \Leftrightarrow k \equiv 0$ ou $5 \bmod 10$.

Si $k = 0$, $100\,k \pm 38 = 38$ ou $-38 \equiv 962 \bmod 100$.

Si $k = 5$, $100\,k \pm 38 = 538$ ou $462 \bmod 100$.

Vérifions : $38^2 = 1444$; $462^2 = 213\,444$; $538^2 = 289\,444$; $962^2 = 925\,444$.

Mais si on veut quatre 4 en terminaison, ça ne va plus, car si on examine les candidats possibles : *038, *462, *538, *962 on trouve à chaque fois une impossibilité, par exemple :

$(1000\,k \pm 462)^2 = 1\,000\,000\,k^2 \pm 924\,000\,k + 213\,444 \equiv 4444 \bmod 1000$ se simplifie :

$\pm 4000\,k + 3444 \equiv 4444 \bmod 1000 \Leftrightarrow \pm 4000\,k \equiv 1000 \bmod 1000$.

Soit $\pm 4k \equiv 1 \bmod 10$. C'est impossible.

2) Pour les cubes, on peut avoir des terminaisons par un nombre arbitrairement grand de 1, de 3, de 7 ou de 9.
C'est tout, car un balayage modulo 1000 donne les 4 seules terminaisons de type *aaa* : 111, 333, 777, 999.

D'abord, $\left(10k-1\right)^3 = 10^{3k} - 3\cdot 10^{2k} + 3\cdot 10^k - 1 = 10^{2k}\left(10k-3\right) + 2\cdot 10^k + \left(10^k - 1\right)$ donc

$$\left(10^k-1\right)^3 = \underbrace{999\cdots99}_{k-1\text{ fois}}\ 7\ \underbrace{000\cdots00}_{k-1\text{ fois}}\ 1\ \underbrace{999\cdots99}_{k\text{ fois}}$$

$\left(10^k-1\right)^3$ se termine par k « 9 ». Exemple : $999^3 = 997\,002\,999$..

Pour les autres chiffres, c'est plus compliqué, ainsi si on veut une terminaison en « 7 », on procède comme suit : partant de $3^3 = 27$ par exemple, on va ajouter un 7 en terminaison en résolvant :

$$\left(10k+3\right)^3 = 1000k^3 + 900k^2 + 270k + 27 \equiv 77 \bmod 100$$

qui se simplifie en

$$70k + 27 \equiv 77 \bmod 100 \Leftrightarrow 70k \equiv 50 \bmod 100 \Leftrightarrow 7k \equiv 5 \bmod 10 \Leftrightarrow k \equiv 5 \bmod 10.$$

Vérifions : $53^3 = 148\,877$.
Pour ajouter encore un 7 en terminaison on part de 53 et on résout :

$$\left(100k+53\right)^3 = 1\,000\,000k^3 + 1\,590\,000k^2 + 842\,700k + 148\,877 \equiv 777 \bmod 1000$$

qui se simplifie en

$$700k + 877 \equiv 777 \bmod 1000$$
$$\Leftrightarrow 700k \equiv -100 \bmod 1000 \Leftrightarrow 7k \equiv 9 \bmod 10 \Leftrightarrow k \equiv 7 \bmod 10.$$

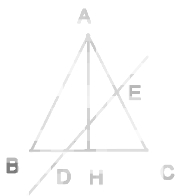
Et en effet : $753^3 = 426\,957\,777$. Ici, on a un « 7 » non prévu, tant mieux.
Cela fonctionne à l'infini, car on se ramène toujours à une équation $7k \equiv a \bmod 10$, qui équivaut à $k \equiv 3a \bmod 10$ puisque l'inverse de 7 modulo 10 est égal à 3.
Pour ajouter un « 7 », le plus simple est par conséquent, d'essayer les 10 chiffres devant le résultat antérieur. Ainsi en essayant $*\,07\,533 = \ldots 77\,777$ on trouve la seule solution $607\,533 = 224\,234\,888\,577\,777$.
Puis, en essayant $*\,60\,753^3 = \ldots 777\,777$ on trouve la seule solution

$$660\,753^3 = 288\,481\,143\,504\,777\,777$$

etc.

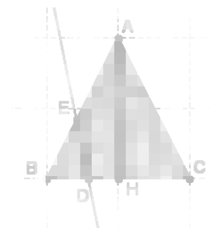
Exercice 516–4 : Izán Péraz – ?

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que AH = BC où H désigne le pied de la hauteur issue de A.
Une droite traverse le triangle en coupant la base [BC] en D et l'un des deux autres côtés en E.
Quelle est la probabilité que DE soit supérieure ou égale à BC ?



Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Pierre Carriquiry (Clichy), Walter Mesnier (Poitiers), Michel Lafond (Dijon), Bruno Alaplantive (Saint Jean du Falga).

Voici la solution de Walter Mesnier.
Remarquons d'emblée que l'expérience aléatoire présentée ici manque de précision. En effet il y a plusieurs façons de choisir « au hasard » une droite qui coupe le triangle. On s'expose sans doute dans cet exercice à un paradoxe type « Bertrand ». Quoiqu'il en soit, cherchons à modéliser la situation pour obtenir une réponse au problème.



On suppose que BC = AH = 2 de sorte que AB = $\sqrt{5}$ et que $\cos\left(\widehat{\mathrm{ABH}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}$.
On définit la droite (DE) en choisissant E sur le segment [AB] puis D sur le segment [BC].
Pour cela on pose x = BD et y = BE et on tire au hasard (selon une loi uniforme) $x\in[0;2]$ et $y\in\left[0;\sqrt{5}\right]$.
Il faut maintenant chercher une relation qui traduit la condition DE ≥ BC.
On peut utiliser le théorème d'Al Kashi dans le triangle BED :

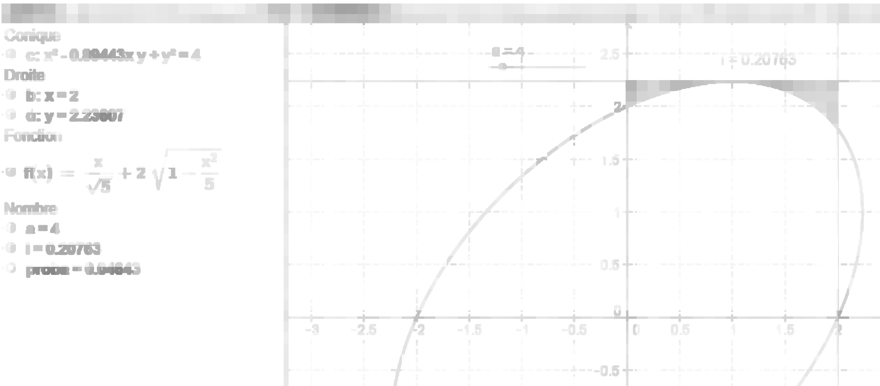
$$\mathrm{DE}^2=\mathrm{BD}^2+\mathrm{BE}^2-2\times\mathrm{BD}\times\mathrm{BE}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{EBD}}\right).$$

Donc $\mathrm{DE}^2=x^2+y^2-\frac{2xy}{\sqrt{5}}$.

On obtient une relation équivalente à DE ≥ BC en écrivant $\mathrm{DE}^2 \geq 4$ avec $\mathrm{D}\in[\mathrm{BC}]$ et $\mathrm{E}\in[\mathrm{BA}]$;

c'est-à-dire $x^2+y^2-\frac{2xy}{\sqrt{5}}\geq 4$ avec $(x,y)\in[0;2]\times\left[0;\sqrt{5}\right]$.

La probabilité cherchée revient à calculer le rapport des aires $\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}$ où A_2 est l'aire du rectangle de largeur 2 et de longueur $\sqrt{5}$ et A_1 est l'aire grisée dans la figure ci-dessous (portion de plan extérieure à l'ellipse d'équation $x^2+y^2-\frac{2xy}{\sqrt{5}}=4$ et à l'intérieur du rectangle).



On trouve à l'aide de GeoGebra (par exemple) que ce rapport vaut environ $\dfrac{0.20763}{2\sqrt{5}} \approx 0.04643$ donc une probabilité d'environ 4,6%. Ce qui est peu. Mais pour ce qu'on veut en faire …

Remarque 1. Pour la valeur exacte, il faudrait calculer l'intégrale $\int_0^1 \left(\sqrt{5} - f(x)\right) \mathrm{d}x$ où $f(x)$ exprime y en fonction de x dans l'équation de la partie « haute » de l'ellipse, mais on peut se contenter d'une valeur approchée déjà très précise (4,6%), pour une probabilité qui était déjà mal définie au départ...

Cela dit, avec un peu de patience, ou de technique ou avec un logiciel de calcul formel, on finit par obtenir une primitive de $f(x) = 2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{5}} + \dfrac{x}{\sqrt{5}}$:

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt{5}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} + \frac{x^2}{2\sqrt{5}}.$$

On en déduit la valeur exacte de la probabilité cherchée : $0{,}6 - 0{,}5\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, mais cela ne nous avance pas beaucoup plus...

Remarque 2. Avec la même approche, la relation

$$\mathrm{P}(\mathrm{DE} \geq \mathrm{BC}) = \mathrm{P}(\mathrm{E} \in [\mathrm{AB}]) \times \mathrm{P}_{\mathrm{E}\in[\mathrm{AB}]}(\mathrm{DE} \geq \mathrm{BC}) + \mathrm{P}(\mathrm{E} \in [\mathrm{AC}]) \times \mathrm{P}_{\mathrm{E}\in[\mathrm{AC}]}(\mathrm{DE} \geq \mathrm{BC})$$

alliée à des considérations de symétrie, permet à Pierre Renfer et Pierre Carriquiry de n'étudier que le seul cas dans lequel E est sur[AB] pour obtenir la même probabilité.

Par une approche angulaire, Michel Lafond et moi-même obtenons une probabilité d'environ 0,01621 confirmant ainsi que choisir une droite au hasard est déjà hasardeux !

L'étude de Michel Lafond est disponible sur le site de l'association.