

Mathématiques et Biologie-Géologie en classe de BCPST

Bruno Anselme et Martine Ginestet(*)

« *Alors, on va chercher dans une autre direction...* » Voilà une réponse qui était souvent faite il y a une dizaine d'années lorsque nous suggérions à des groupes de TIPE en BCPST (classes préparatoires Biologie-Chimie-Physique-Sciences de la Terre) qu'il y avait derrière leur travail la possibilité d'une modélisation « mathématique », une possibilité de mettre en équations les concepts qu'ils cherchaient à cerner. Fuyons les maths ! Mais les temps ont bien changé, de telles attitudes n'ont plus cours et de nombreuses passerelles existent aujourd'hui entre les enseignements de mathématiques et de biologie dans la filière BCPST.

Nous voudrions vous présenter ici, très succinctement, notre vision sur ces aspects. Les points de vue depuis les deux bouts de la passerelle, en quelque sorte.

Pourquoi un biologiste ferait-il des mathématiques ?

Il ne s'agit pas ici de parler des mathématiques en tant qu'outil. S'il est indéniable que les mathématiques fournissent des outils techniques utiles au biologiste, cela ne semble pas être un enjeu pédagogique majeur. L'étudiant acquiert la maîtrise d'outils en cours de mathématiques, il utilise ces outils en cours de biologie. Peu d'interdisciplinarité là-dedans.

Alors pourquoi un biologiste ferait-il des mathématiques ? Parce que les mathématiques sont une science de la nature, tout simplement. Elles font (entre autre) partie des sciences du vivant.

Le problème est connu des biologistes : faire de la microscopie en n'étant pas opticien ni très féru de géométrie, faire de la biochimie en n'étant pas chimiste, faire de la dynamique des populations en n'étant pas mathématicien, suivre des traceurs en n'étant pas physicien. Mais nous savons tous que l'on n'analyse pas le vivant avec des jumelles ou avec un microscope, qu'on n'analyse le vivant ni avec des molécules ni avec des isotopes, qu'on n'analyse pas le vivant avec de la thermodynamique : on l'analyse avec un cerveau. Et le cerveau a besoin de « prothèses » pour voir plus clair, pour voir plus loin, pour trouver son chemin dans une cellule, pour faire des tests.

Et il en est de même avec la modélisation mathématique : c'est un moyen parmi de nombreux autres d'analyser le vivant, d'interroger la nature, de tester des hypothèses.

Les mathématiques permettent de prolonger des idées, de pousser des hypothèses dans leurs retranchements, ou même de se réfugier un temps dans un domaine (la modélisation) où l'on est certain que ce qui est vrai est vrai et que ce qui est faux est faux (c'est reposant, pour un expérimentateur...). La biologie, la géologie peuvent

(*) Professeurs de SVT et de mathématiques en BCPST2.
anselmeb@wanadoo.fr - martine-ginestet@orange.fr

être floues ; un modèle mathématique ne peut pas l'être, ne doit pas l'être. C'est le lien entre modèle et réalité qui peut poser problème, mais pas le modèle.

Pourquoi un professeur de mathématiques ferait-il de la biologie ?

Les élèves de terminales, souvent bons élèves en mathématiques, choisissent la filière BCPST par goût pour les sciences de la vie et de la Terre. Pour la plupart, les mathématiques sont une discipline de sélection, abstraite, éloignée de leurs intérêts. Ils ne rechignent pas devant un calcul de développement limité ou de recherche de valeur propre, mais devant des enseignements plus théoriques (par exemple l'algèbre linéaire), il n'est pas rare d'entendre des « *À quoi ça sert, toutes ces maths ?* »

L'interdisciplinarité permet de leur faire comprendre en quoi les mathématiques sont nécessaires à la compréhension du vivant : la diagonalisation intervient dans la matrice des contraintes en géologie, dans l'étude des populations structurées en âges, les suites ou équations différentielles dans les systèmes proie-prédateurs...

Mais il ne faut pas se voiler la face. Comprendre ou concevoir des modèles, utiliser des outils plus sophistiqués pour résoudre un problème non classique, tout ceci est difficile pour les élèves qui doivent faire preuve de recul et d'esprit analytique. Les élèves comprennent le problème biologique ou géologique, comprennent les calculs mathématiques mis en œuvre, mais ont des difficultés à faire le lien. Cela demande un apprentissage en douceur en commençant par des modèles simples.

Et cette approche modélisatrice, cette interdisciplinarité ne doivent pas se faire au détriment de la rigueur. Il ne suffit pas de concevoir ces modèles, il faut aussi apprendre à formaliser et à démontrer rigoureusement.

Les mathématiques sont une science utile aux autres disciplines mais aussi une discipline formatrice pour le raisonnement, l'abstraction et l'apprentissage de la rigueur. Savoir calculer, savoir démontrer, savoir modéliser sont des qualités complémentaires nécessaires pour de futurs ingénieurs ou chercheurs.

La réforme du programme et l'introduction de l'informatique ont donné un souffle nouveau à l'enseignement des mathématiques, mais rien ne serait possible sans la participation active de tous les collègues scientifiques.

Et quelle joie quand, en cours de maths, un élève s'écrit « *Oh, mais c'est ce qu'on a vu en Bio !* » !

L'originalité de la filière BCPST

L'équilibre entre les disciplines est le maître mot de la filière BCPST. Le M de mathématiques ne figure pas dans cet acronyme ; pour autant, les mathématiques, les sciences physiques, les sciences de la vie et de la Terre y sont enseignées à parts sensiblement égales. Par comparaison avec les filières MP, PC ou SI, on y fait donc un peu moins de mathématiques ou de physique et chimie, laissant ainsi de la place aux SVT. Pour autant, les SVT n'y représentent qu'un tiers de l'enseignement scientifique.

Au classique dialogue entre mathématiques et physique-chimie se substitue donc une relation triangulaire. Même si c'est à un niveau moindre, les mathématiques tissent des liens comparables avec SVT et sciences physiques. Et les sciences physiques interfèrent très fortement avec la biologie et la géologie.

Leurs goûts en la matière sont très divers, mais les étudiants en BCPST font des mathématiques, font de la physique et de la chimie et font de la biologie et de la géologie. Et ce bel équilibre, au total, permet d'envisager des approches pédagogiques interdisciplinaires. Les programmes officiels mentionnent d'ailleurs explicitement l'existence de certaines de ces passerelles.

D'un programme à l'autre

Le programme de biologie-géologie

La nouveauté dans les programmes de biologie en BCPST est l'introduction de thèmes tournant autour des écosystèmes et autour de l'évolution. Deux domaines où la modélisation mathématique tient un rôle non négligeable.

La dynamique des populations nous amène à traiter les modèles de Malthus ($dN/dt = rN$) et de Verhulst ($dN/dt = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$). Par la suite le modèle proie-prédateurs de Lotka et Volterra est abordé. Il n'est pas fait, en cours de biologie, d'analyse mathématique détaillée de ces modèles. En particulier, l'étude de Lotka-Volterra se limitera à des enchaînements de « on montre que... ». L'intérêt est ailleurs. Il s'agit d'abord d'identifier clairement les significations biologiques des différents paramètres et variables utilisés, une manière de se familiariser avec une démarche modélisatrice.

Par la suite, l'étudiant est amené à critiquer ces modèles, à envisager leur domaine de validité et à imaginer des améliorations possibles. L'outil informatique et la programmation sont ici une aide appréciable. Aller-retour entre modèle et réalité, en passant par la réflexion du scientifique, nous sommes au cœur de la notion de modélisation.

L'évolution et la génétique des populations fournissent une deuxième volée de modèles mathématiques. Ici, les probabilités ont la part belle. Et, encore une fois, il n'est pas question de « faire des probabilités » en cours de biologie, mais bien d'évoquer des modèles désormais classiques.

Prenons un exemple : l'expérience de Luria et Delbruck (étude d'une mutation dans une population bactérienne), permet de trancher entre deux hypothèses via l'analyse statistique de résultats. Une population bactérienne est mise en présence de virus. La plupart des bactéries meurent et ne subsistent plus que des mutantes, résistantes au virus. Est-ce l'exposition au virus qui a provoqué la mutation, ou bien la mutation pré-existait-elle, l'exposition au virus ne faisant que la révéler ? La modélisation de l'expérience permet de faire une prédiction à partir de chacune des hypothèses. Dans le premier cas, on démontre que l'on s'attend à des résultats suivant une loi de Poisson et donc à une répartition caractérisée par une variance égale à l'espérance. Dans l'autre cas, on démontre que la variance devrait être très

supérieure à l'espérance. Les résultats empiriques (expérimentaux) de Luria et Delbruck montrent clairement que la variance est plusieurs centaines de fois supérieure à l'espérance, ce qui permet de trancher en faveur de la seconde hypothèse.

Ainsi, on se retrouve à faire, en quelque sorte, des mathématiques « avec les mains ». On ne démontre pas, on montre. On montre qu'il est logique de s'attendre à une loi de Poisson. On utilise nos connaissances de maths (pour une loi de Poisson, variance et espérance sont égales). Et on se sert de ces conséquences pour trancher.

D'autres outils probabilistes pointent le bout de leur nez, ça et là, dans le cours de biologie. Des outils très simples pour la loi de Hardy Weinberg, d'autres plus complexes (espérance et variance conditionnelles) pour la dérive génétique (modèle de Fisher et Wright). À chaque fois, la démarche est la même. On ne réalise pas la moindre démonstration, presque pas de calcul. Mais on pointe l'existence de la passerelle. Et lors d'une épreuve, écrite ou orale, on attendra de l'étudiant qu'il sache restituer la démarche (« on montre que... », « il est possible de démontrer que... ») mais pas qu'il se livre à un calcul. Par exemple, il devra seulement expliciter correctement les différents termes des équations de Lotka-Volterra ou d'autres modèles.

En revanche, ces nombreux points peuvent fournir des opportunités d'exercices ou d'exemples de cours pour le collègue de mathématiques. Une dernière remarque cependant : ce paragraphe est écrit par un professeur de SVT qui aime évoquer ces passerelles entre biologie et mathématiques. Le programme de biologie de BCPST mentionne ces modèles (Lotka-Volterra, Luria-Delbruck, Hardy-Weinberg, ...), mais il n'est aucunement exigible qu'un professeur de biologie s'étende particulièrement sur leurs aspects mathématiques.

Le programme de mathématiques et informatique

En première année, sont mentionnés en mathématiques, les modèles de Malthus, de Verhulst, ainsi que le modèle de Gompertz. Ce sont là les seules références explicites à la biologie. Ce n'est donc pas un programme orienté vers la biologie. Mais, comme il vient d'être dit plus haut, les occasions sont nombreuses d'évoquer de la biologie.

Une particularité des BCPST est la proportion importante de probabilités (environ la moitié) dans le programme de mathématiques. Cela permet (mais n'impose aucunement) d'aborder les exemples de génétique des populations évoqués plus haut (mutations, sélection, etc.).

L'étude des matrices peut également être exploitée en dynamique des populations avec l'exemple des matrices de Leslie. L'étude de la déformation en géologie fournit également des exemples de manipulation de matrices.

Enfin, l'enseignement de l'informatique (programmation en Python) est intimement (mais pas uniquement) associé à celui des mathématiques. Rien n'indique, bien entendu, que cela doive être appliqué à la Biologie, mais rien ne l'interdit. En particulier, les élèves pourront être amenés à programmer des modèles d'après Verhulst, Gompertz ou Lotka-Volterra, en utilisant la méthode d'Euler. De

tels modèles (et d'autres, fournis par le professeur) sont ensuite exploités en TP de biologie. Les aptitudes des étudiants en programmation sont alors précieuses pour ajuster, modifier un modèle, tester des jeux de paramètres, sans nécessairement entrer dans les détails mathématiques de ce modèle.

Dernier point : au principal concours présenté par les étudiants (le concours commun Agro-Véto), il y a une épreuve écrite de modélisation mathématique et informatique. Les étudiants sont clairement incités à décloisonner leurs connaissances et leurs pratiques.

Conclusion

De telles approches interdisciplinaires ont plusieurs intérêts en BCPST. Ouvrir les esprits en est sans doute le principal. Mais c'est surtout un moyen d'amener aux mathématiques des étudiants qui parfois les rejettent. De la même manière qu'en sciences physiques, mais dans un domaine qui les attire plus, on expérimente concrètement l'intérêt qu'il y a à résoudre un système d'équations différentielles, à diagonaliser une matrice, à calculer une variance. L'exemple développé dans le texte qui suit présente un cas concret où une approche probabiliste permet de confirmer une intuition, une hypothèse suggérée par des résultats expérimentaux. Vient ensuite le texte d'un TD de mathématiques proposé aux étudiants sur ce sujet (qui aura été préalablement présenté en cours de biologie).