

Rudolf Bkouche était un lecteur et un contributeur assidu de notre Bulletin. On trouvera ci-dessous sa dernière réaction à un de nos articles.

Sur les démonstrations du théorème de Pythagore

Rudolf Bkouche

Introduction

Dans le numéro 517 du *Bulletin de l'APMEP*, Daniel Djament rappelle deux démonstrations du théorème de Pythagore. La seconde démonstration est une variante de celle donnée par Euclide dans les *Éléments* (Livre VI, proposition 31¹) comme le rappelle l'auteur⁽²⁾.

Je reviendrai sur la deuxième démonstration en rappelant les deux façons de faire cette démonstration. Je reviendrai ensuite sur la première démonstration qui reprend une démonstration de Clairaut, elle-même variante d'une démonstration indienne.

Examinons d'abord deux énoncés du théorème de Pythagore :

Premier énoncé : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Second énoncé : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Ces deux énoncés sont identiques et pourtant ils ont des significations différentes. Cela nous rappelle que tout énoncé doit être lu dans son contexte.

Le premier énoncé est indépendant de toute mesure, il dit que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. C'est celui que l'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide.

Le second énoncé, que l'on trouve dans les *Éléments de Géométrie* de Legendre et dans les ouvrages ultérieurs, renvoie à la mesure, les carrés des côtés désignant les carrés de leurs mesures.

La seconde démonstration donnée par Daniel Djament peut alors être lue de deux façons, une façon euclidienne et une façon legendrienne, cette dernière s'appuyant sur la mesure des longueurs.

Rappelons que si Euclide a travaillé sur les grandeurs indépendamment de toute notion de mesure, c'est pour répondre à la difficulté posée par la découverte des rapports de grandeurs incommensurables. Cependant la distinction entre grandeurs et mesure ne se réduit pas à cet aspect historique, elle est essentielle même si elle peut

(1) Les références aux *Éléments* d'Euclide renvoient à la traduction de Peyrard : *Les Œuvres d'Euclide* (1819), Blanchard, Paris 1993.

(2) Rappelons qu'Euclide donne deux démonstrations du théorème de Pythagore, les deux s'appuyant sur la méthode des aires (Livre I, proposition 47 et Livre VI, proposition 31), la seconde seule utilisant la théorie des proportions.

apparaître difficile. Il ne faut pas oublier que le calcul littéral porte autant sur les grandeurs que sur les nombres comme l'explique Viète dans l'*Introduction à l'Art Analytique* cité dans la bibliographie et que c'est le calcul sur les grandeurs qui apparaît en géométrie et en physique avec l'importante loi des homogènes définie par Viète. Nous revenons, dans l'appendice, sur la relation entre grandeurs et nombres.

Le point de vue euclidien

Dans ce paragraphe nous nous efforçons de conserver le style euclidien, mettant en avant les rapports de grandeurs.

La démonstration de type euclidien s'appuie sur la proposition 19 du Livre VI des *Éléments* :

Les triangles semblables sont entre eux en raison double des côtés homologues.

En langage moderne, cet énoncé signifie que le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au rapport des aires des carrés construits sur des côtés homologues.

Nous donnons ci-dessous deux démonstrations de cette proposition, s'appuyant toutes deux sur la théorie des proportions développée dans les Livres V et VI des *Éléments* : d'abord une démonstration différente de celle d'Euclide, ensuite la démonstration originelle d'Euclide.

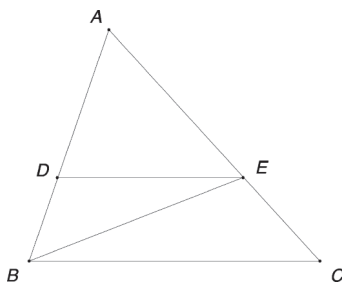


fig. 1

On peut considérer le rapport des aires des triangles semblables ABC et ADE comme le rapport composé⁽³⁾ du rapport des aires des triangles ABC et ABE et du rapport des aires des triangles ABE et ADE. On sait que le rapport des aires des triangles ABC et ABE est égal au rapport des segments AC et AE et que le rapport des aires ABE et ADE est égal au rapport des segments AB et AD (Livre VI, proposition 1), on sait aussi que le rapport des segments AB et AD est égal au rapport des segments AC et AE (Livre VI, proposition 2⁽⁴⁾) Il s'ensuit que le rapport des aires des triangles ABC et ADE est le rapport double des segments AB et AD. On montre alors que la raison double du rapport des segments AB et AD est égal au rapport de

(3) La notion de rapport composé n'est pas explicitement définie dans les *Éléments* même si elle apparaît dans de nombreuses démonstrations. Pour la définition de « rapport composé » ou « raison composée » et de « rapport double » ou « raison double », nous renvoyons à l'appendice.

(4) Cette proposition est aujourd'hui appelée « théorème de Thalès », dénomination introduite à la fin du XIX^e siècle.

l'aire du carré construit sur AB et de l'aire du carré construit sur AD. La notion de raison double apparaît comme un cas particulier de la composition des raisons.

Cette notion utilisée par Euclide n'est pas explicitement définie, elle apparaît dans la proposition 23 du livre VI ainsi énoncée :

Les parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison composée des côtés.

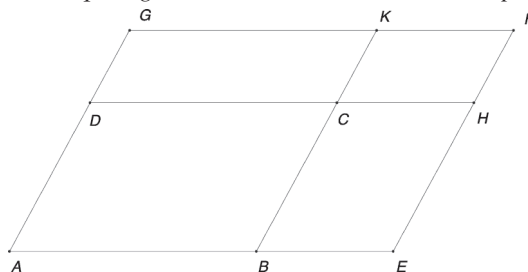


fig. 2

Considérons les parallélogrammes ABCD et AEFH, alors le rapport des aires des parallélogrammes ABCD et AEFH est le rapport composé du rapport des aires ABCD et AEHD et du rapport des aires AEHD et AEFH. On sait que le rapport des aires des parallélogrammes ABCD et AEHD est égal au rapport des côtés AB et AE et que le rapport des aires des parallélogrammes AEHD et AEFH est égal au rapport des côtés AD et AG. (Livre VI, proposition 1).

Ceci achève la démonstration.

Voici la démonstration originelle d'Euclide telle qu'on la trouve dans Peyrard (Livre VI, proposition 19)

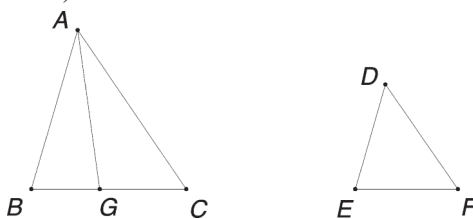


fig. 3

Soient ABC et DEF deux triangles semblables et soit G le point du côté BC tel que BG soit la troisième proportionnelle des côtés BC et EF, c'est-à-dire telle que le rapport du côté BC au côté EF soit égal au rapport du côté EF au côté BG.

Les triangles ABC et DEF étant semblables, le rapport du côté AB au côté DE est égal au rapport du côté BC au côté EF et par conséquent au rapport du côté EF au côté BG. On en déduit que les aires des triangles ABG et DEF sont égales : en effet les angles $\angle DABG$ et $\angle DEF$ sont égaux et les côtés BA et BG sont inversement proportionnels aux côtés ED et EF (Livre VI, proposition 15).

Le rapport de l'aire du triangle ABC à l'aire du triangle DEF est donc égal au rapport de l'aire du triangle ABC à l'aire du triangle ABG, et par conséquent au rapport du côté BC au côté BG, soit au rapport composé du rapport BC au côté EF et du rapport du côté EF au côté BG, soit au rapport double des côtés BC et EF.

Pour être complet il nous reste à démontrer la proposition 15 du livre VI que nous énoncerons ainsi:

Soit deux triangles ABC et DEF tels que les angles $\angle BAC$ et $\angle EDF$ soient égaux, alors les aires des triangles ABC et DEF sont égales si et seulement si les côtés AB et AC sont inversement proportionnels aux côtés DE et DF .⁽⁵⁾

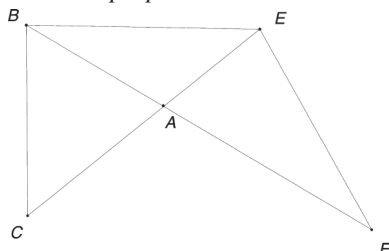


fig. 4

Puisque les angles $\angle BAC$ et $\angle EDF$ sont égaux on peut placer le triangle DEF tel que les points A et D coïncident, que le point E soit dans le prolongement du côté CA et le point F soient dans le prolongement du côté BA .

Dans le triangle BEC , le rapport des aires des triangles BAE et BAC est égal au rapport des segments AE et AC . Dans le triangle EBF , le rapport des aires des triangles EAB et EAF est égal au rapport des segments AB et AF . Il s'ensuit que les aires des triangles ABC et AEF sont égales si et seulement si le rapport des côtés AE et AC est égal au rapport des côtés AB et AF .

Ainsi la démonstration euclidienne s'appuie essentiellement sur la relation entre rapports d'aires et rapports de longueurs.

On peut alors donner la version euclidienne de la seconde démonstration de Djament.

On considère un triangle ABC rectangle en A , H le pied de la hauteur issue de A , alors les triangles AHB et ACB sont semblables et par conséquent le rapport des aires de ces triangles est égal au rapport des aires des carrés construits sur les hypoténuses AB et BC , de même les triangles AHC et ABC sont semblables et les rapports des aires de ces triangles est égal au rapport des aires des carrés construits sur les hypoténuses AC et BC . Comme l'aire du triangle ABC est la somme des aires des triangles AHB et AHC , il s'ensuit que l'aire du carré construit sur le côté BC est égale à la somme des aires des carrés des triangles construits sur les côtés AB et BC .

La démonstration n'est pas exactement celle d'Euclide, mais elle s'appuie sur les résultats des livres V et VI. Elle peut aisément être donnée à des élèves de collège si on met l'accent sur la méthode des aires, et cela indépendamment de toute formule.

(5) Nous dirons que les grandeurs a et b sont *inversement proportionnelles* aux grandeurs c et d si les rapports a/d et c/b sont égaux. Dans sa traduction Peyrard utilise l'expression « réciproquement proportionnelles ».

Le point de vue legendrien

Dans le Livre III des *Éléments de Géométrie* consacré à la similitude, Legendre définit le rapport de deux grandeurs comme le rapport de leurs mesures. Les rapports sont ainsi définis comme des rapports de nombres, ce qui renvoie à l'arithmétique⁽⁶⁾. On peut alors écrire, avec le point de vue de Legendre, que le rapport des aires $(ABC)/(ADE)$ est égal au rapport AB^2/AD^2 , mais ici les rapports sont des rapports de nombres.

Mais Legendre, ne disposant pas d'une théorie des nombres réels, doit recourir à la méthode d'exhaustion pour démontrer certains théorèmes comme, par exemple, la proposition 3 du Livre III :

Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Cela conduit Legendre à osciller entre un discours de type euclidien et un discours s'appuyant sur les proportions numériques. C'est ainsi qu'il donne deux démonstrations du théorème de Pythagore, la première (Livre III, proposition 11) analogue à la démonstration de la proposition 47 du Livre I des *Éléments* d'Euclide, la seconde s'appuyant sur la similitude exprimée en termes de rapports numériques. Pour ce faire, Legendre énonce et démontre la proposition suivante (Livre III, proposition 23) : *Si de l'angle droit A d'un triangle rectangle on abaisse la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse,*

1° Les deux triangles partiels ABD et CAD seront semblables entre eux et au triangle total ABC.

2° Chaque côté AB ou AC sera moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse BC et le segment adjacent BD ou CD.

3° La perpendiculaire AD sera moyenne proportionnelle entre les deux segments BD, DC.

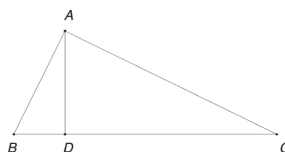


fig. 5

La proposition 2° permet d'écrire les relations : $AB^2 = BC \cdot BD$, $AC^2 = BC \cdot CD$. On en déduit le théorème de Pythagore.

C'est l'exposé classique que l'on trouve dans les ouvrages d'enseignement français depuis Legendre jusqu'à la réforme des mathématiques modernes. Notons que le point de vue legendrien permet de travailler sur les longueurs sans utiliser la méthode des aires.

Avant de donner la seconde démonstration de Djament, nous rappelons le traitement des aires chez Legendre.

Legendre montre d'abord que l'aire d'un triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme (Livre III, proposition 2), puis il montre que l'aire d'un

(6) A. M. Legendre, *Éléments de Géométrie*, p. 61.

parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur (Livre III, proposition 4 et 5) ce qui implique que l'aire d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur (Livre III, proposition 6).

Il peut alors montrer la proposition 24 :

Deux triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal. Ainsi le triangle ABC est au triangle ADE comme le rectangle $AB \times AC$ est au rectangle $AD \times AE$.

En effet menons la droite BE, on peut alors écrire les relations :

$$\text{aireABE}/\text{aireADE} = AB/AD$$

et

$$\text{aireABC}/\text{aireABE} = AC/AE$$

ce qui implique

$$\text{aireABC}/\text{aireADE} = AB \times AC / AD \times AE$$

D'où la proposition⁽⁷⁾.

On en déduit aisément la proposition 25 :

Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.

On peut alors donner la version legendrienne de la seconde démonstration de Djament.

On considère un triangle ABC rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A. Puisque les triangles AHB et ACB sont semblables, on a la relation

$$\text{aireAHB}/\text{aireACB} = AB^2/BC^2$$

De même, puisque les triangles AHC et ABC sont semblables, on a la relation

$$\text{aireAHC}/\text{aireABC} = AC^2/BC^2$$

Puisque

$$\text{aireABC} = \text{aireAHB} + \text{aireAHC}$$

on en déduit la relation

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Ainsi la version legendrienne de la seconde démonstration de Djament est la même que la version euclidienne, les rapports de grandeurs étant remplacés par des rapports de mesures de grandeurs.

Sur la première démonstration donnée par Djament

On peut donner une version euclidienne de la première démonstration de Djament, laquelle renvoie à la démonstration indienne reprise par Clairaut dans ses *Éléments de Géométrie*.⁽⁸⁾

(7) Rappelons que les rapports sont des rapports numériques, ce qui permet d'utiliser les règles de l'arithmétique.

(8) Clairaut, *Éléments de Géométrie*, tome 1, p. 77-80.

Soit ABC un triangle rectangle en A , on construit un carré dont le côté vaut la somme des côtés AB et AC . Soit $DEFG$ le carré ainsi obtenu et on définit les points P, Q, R, S , tel que les segments AB, DP, EQ, FR, GS soient égaux. Il est clair que $PQRS$ est un carré.

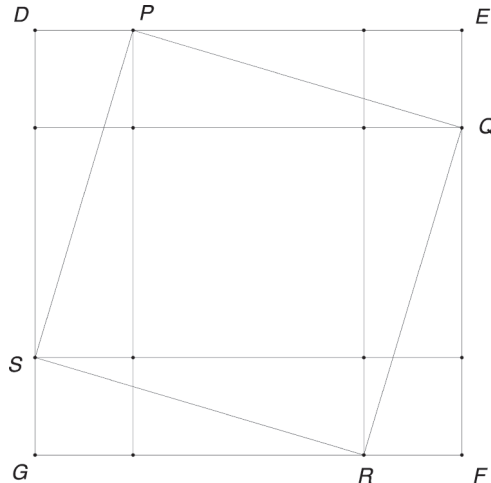


fig. 6

On remarque alors que le carré $DEFG$ peut être décomposé de deux façons différentes.

Le carré $DEFG$ peut être décomposé en quatre triangles égaux au triangle ABC et le carré $PQRS$; il peut aussi être décomposé en deux rectangles dont chacun a une aire double de celle du triangle ABC et deux carrés dont les côtés sont respectivement égaux aux côtés AB et AC . On en déduit aisément le théorème de Pythagore.

Notons que cette méthode ne renvoie pas à la théorie des proportions d'Euclide, mais à sa « méthode des aires » utilisée dans ses livres I et II.

On peut donner une version de cette démonstration en utilisant les formules de calcul d'aires, ce que nous laissons au lecteur. C'est d'ailleurs la première démonstration donnée par Djament.

Question subsidiaire pour le lecteur intéressé

Les *Éléments* d'Euclide montrent que la méthode des aires mise en place par Euclide s'appuie sur le postulat des parallèles, lequel permet de démontrer les deux théorèmes fondamentaux de la géométrie élémentaire, le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès. On peut alors poser la question : où est caché le postulat des parallèles dans la démonstration indienne ?

Appendice

Après la découverte de rapports de grandeurs irrationnels et les questions qu'elle a posées aux mathématiciens grecs, Euclide a proposé dans les *Éléments* de construire une théorie des rapports de grandeurs indépendante de la mesure. C'est

l'objet du Livre V qui traite des rapports et des proportions et du Livre VI qui étudie les proportions géométriques.

Dans le livre V, Euclide ne définit pas les rapports de grandeurs, il se contente d'énoncer (Livre V, proposition 3)

« Une raison est une manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles, suivant la quantité »

On pourrait parler de définition de chose au sens des philosophes de Port-Royal⁽⁹⁾. Une telle définition n'est pas opératoire, mais ce qui importe, c'est moins la définition de la notion de rapport que la définition de l'égalité de deux rapports, ce qu'on appelle une proportion. Mais avant de définir une proportion, Euclide précise la notion de rapport en écrivant (Livre V, proposition 5)

« Deux grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement »

Autrement dit, a et b étant deux grandeurs homogènes, a et b ont une raison entre elles s'il existe un multiple de a plus grand que b et un multiple de b plus grand que a .

Cette définition conduira à la notion de *type de grandeur archimédien* : un type de grandeur est archimédien si deux grandeurs de ce type ont une raison entre elles, c'est-à-dire si a et b étant deux grandeurs de ce type, il existe un multiple de a plus grand que b et un multiple de b plus grand que a .

Euclide peut alors définir la notion « avoir même raison » (Livre V, proposition 6)

« Des grandeurs sont dites avoir même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équi-multiples de la première et de la troisième, et d'autres équi-multiples quelconques de la seconde et de la quatrième, sont tels que les premiers équi-multiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équi-multiples, ou leur sont égaux à la fois, ou sont plus petits à la fois. »

On pourrait écrire cette définition sous la forme suivante :

Étant données quatre grandeurs a, b, c, d , a et b étant homogènes, c et d étant homogènes, alors

$$a/b = c/d$$

si, n et m étant deux nombres entiers, les assertions suivantes sont vérifiées:

$$\text{si } ma > nb, \text{ alors } mc > nd,$$

$$\text{si } ma = nb, \text{ alors } mc = nd,$$

$$\text{si } ma < nb, \text{ alors } mc < nd.$$

Les définitions étant données, Euclide peut montrer les diverses propriétés des proportions, ce qui conduit à un calcul sur les rapports de grandeurs. Ce calcul est indépendant de tout numérique, les seuls nombres intervenant étant les entiers.

Nous avons déjà dit que la composition des raisons n'est pas définie de façon explicite dans les *Éléments* mais apparaît dans certains énoncés comme nous l'avons vu avec la proposition 23 du livre VI sur la comparaison des aires des

(9) Arnaud et Nicole, *La logique ou l'Art de Penser*, p. 215-218 & p. 383-385.

parallélogrammes. La représentation numérique des rapports telle qu'elle apparaît chez Legendre montre que la composition des rapports n'est autre que la multiplication (cf. ci-dessous).

On peut définir le composé des rapports a/b et b/c comme le rapport a/c ; c'est ainsi que la composition des rapports apparaît dans le texte d'Euclide. Pour définir le composé de deux rapports a/b et c/d , il faut alors trouver une grandeur e telle que le rapport c/d soit égal au rapport b/e , autrement dit trouver la quatrième proportionnelle e du triplet (c, d, b) . Ainsi la composition exige l'existence de la quatrième proportionnelle. On sait que l'existence d'icelle pour les longueurs est assurée par le théorème de Thalès (Livre VI, proposition 12).

Notons que la composition des rapports est pensée comme une addition, comme le remarque Vitrac qui, s'appuyant sur une remarque de Paul Tannery, voit dans la notion de composition des rapports une origine musicale, les rapports jouant un rôle analogue aux intervalles musicaux⁽¹⁰⁾. C'est cela qui conduit à parler de raison double pour définir la composition d'un rapport avec lui-même.

Les proportions étant définies dans ce qui est l'un des chapitres les plus formels de l'ouvrage, Euclide peut l'utiliser pour étudier les proportions géométriques et les figures semblables (Livre VI).

Les *Éléments* d'Euclide ont été critiqués au XVII^e et XVIII^e siècle, en particulier par les philosophes de Port-Royal⁽¹¹⁾ et plus tard par Clairaut⁽¹²⁾.

A la fin du XVIII^e siècle, Legendre propose un retour à l'ordre euclidien dans un ouvrage écrit pour l'enseignement des lycées mis en place par les gouvernements révolutionnaires. S'il reprend le style euclidien, il en diffère cependant par son recours au numérique comme il le précise au Livre III consacré aux proportions des figures. C'est ainsi qu'il écrit :

« Pour l'intelligence de ce livre et des suivants, il faut avoir présente à l'esprit la théorie des proportions pour laquelle nous renvoyons aux traités ordinaires d'arithmétique et d'algèbre. »⁽¹³⁾

Après avoir rappelé :

« Si on a la proportion $A : B :: C : D$ ⁽¹⁴⁾ on sait que le produit des extrêmes $A \times B$ est égal au produit des moyens $C \times D$ »

il précise

« Cette vérité est incontestable pour les nombres, elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple, si A, B, C, D , sont des lignes on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors A, B, C, D , représentant chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu,

(10) Euclide, *Les Éléments*, volume 2, p. 63

(11) Arnauld et Nicole, *La logique ou l'art de penser*, p. 398-404

(12) Alexis Clairaut, *Éléments de Géométrie*, préface.

(13) Legendre, *Éléments de Géométrie*, p. 61

(14) L'écriture $A : B :: C : D$ signifie « A est à B comme C est à D », soit, sous forme moderne, $A/B = C/D$.

commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes A, B, C, D, devient une proportion de nombres. »

Les relations entre grandeurs deviennent ainsi des relations entre nombres.

Le point de vue de Legendre renvoie ainsi la mesure des grandeurs à l'arithmétique, se heurtant ainsi à une double difficulté, d'une part une définition de la mesure des grandeurs, d'autre part le statut mal défini des nombres irrationnels. C'est cela qui oblige Legendre à recourir à la méthode d'exhaustion comme nous l'avons déjà signalé.

La question se pose alors d'expliquer le lien entre les rapports de grandeurs définis par Euclide et les rapports de mesures des grandeurs utilisés par Legendre. Mais cela demande de définir le statut des nombres irrationnels ce qui ne sera fait que dans la seconde partie du XIX^e siècle, avec en particulier les travaux de Dedekind⁽¹⁵⁾. Une fois définis les nombres réels, on peut définir de façon précise la mesure des grandeurs, c'est ce que fait Tannery dans ses *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*. Cet ouvrage, destiné aux élèves de la classe de Mathématiques Élémentaires, contient trois chapitres destinés « *aux lecteurs qui veulent pousser plus loin leurs études scientifiques* », un chapitre sur la définition des nombres réels *via* les coupures de Dedekind, un chapitre sur la mesure des grandeurs et un chapitre d'introduction à la Théorie des nombres.

On peut exposer la théorie de Dedekind de la façon suivante :

Soit \mathbb{Q} le corps des rationnels, on appelle section commençante de \mathbb{Q} toute partie S distincte de \mathbb{Q} telle si r est un élément de S et si s est inférieur à r , alors s est un élément de S . On appelle section finissante de \mathbb{Q} le complémentaire d'une section commençante.

Trois cas peuvent se présenter :

- S a un plus grand élément x
- le complémentaire S' de S a un plus petit élément x
- S n'a pas de plus grand élément et S' n'a pas de plus petit élément

Dans les deux premiers cas, on associe le nombre rationnel x à la section commençante S , dans le troisième cas, la section commençante définit un nombre irrationnel.

On définit alors sur l'ensemble des sections commençantes une relation d'ordre total et ses opérations d'addition et de multiplication, lesquelles prolongent celles de \mathbb{Q} ce qui définit un corps ordonné \mathbb{R} : corps des réels. On renvoie pour l'étude de \mathbb{R} aux ouvrages cités de Dedekind et de Tannery.

On peut alors définir la mesure des grandeurs de la façon suivante :

Soit G un type de grandeur, c'est un ensemble totalement ordonné. Nous dirons que G est un type de grandeur additif s'il est muni d'une addition possédant les propriétés suivantes :

- l'addition est une opération associative et commutative, que l'on notera $+$.
Deux grandeurs a et b étant donnée, on appelle somme de a et b la grandeur $a + b$.

(15) Richard Dedekind, « *Continuité et nombres irrationnels* » in *La création des nombres*, p. 57-89.

- soient a, b, c trois grandeurs, si $b < c$, alors $a + b < a + c$.
- G possède un plus petit élément, noté 0 , qui est l'élément neutre pour l'addition, c'est-à-dire tel que $a + 0 = a$.

On montre aisément que deux grandeurs non nulles étant données, leur somme est supérieure à chacune d'elle.

Enfin on suppose vérifiée l'assertion suivante :

- soient deux grandeurs a et b telles que $a < b$, il existe une grandeur c telle que $b = a + c$.

On montre aisément l'unicité de c .

Nous dirons que G est archimédien s'il vérifie la propriété suivante :

Soit a et b deux grandeurs de G telles que a soit inférieure à b , alors il existe un multiple de a plus grand que b .

Soit a et b deux grandeurs, on définit l'ensemble S des rationnels $r = p/q$ tel que pb soit inférieur à qa , alors S est une section commençante de \mathbb{Q} et on appelle rapport de a à b le nombre réel défini par S , on note ce nombre a/b .

On peut relier cette définition à la définition euclidienne. En effet soient G et H deux types de grandeurs additifs et archimédiens, a et b deux grandeurs de type G et c et d deux grandeurs de type H , on vérifie aisément que les rapports a/b et c/d sont égaux si et seulement si les quatre grandeurs a, b, c, d constituent une proportion au sens d'Euclide.

Soit u une grandeur, on appelle mesure d'une grandeur a par rapport à u le nombre $\mu_u(a) = a/u$. La grandeur u est appelée l'unité pour la mesure μ_u .

On montre les propriétés suivantes :

1- la mesure μ_u est additive, c'est-à-dire que l'on a la relation

$$\mu_u(a + b) = \mu_u(a) + \mu_u(b).$$

2- la mesure μ_u conserve les rapports, c'est-à-dire que l'on a la relation

$$a/b = \mu_u(a) / \mu_u(b).$$

On explicite ainsi la relation entre les rapports au sens d'Euclide et les rapports au sens de Legendre.

Bibliographie

Antoine ARNAUD et Pierre NICOLE, *La Logique ou l'Art de Penser* (1662, cinquième édition 1683), Introduction de Louis Marin, « Champs », Flammarion, Paris 1970.

Rudolf BKOUCHE, « Autour du théorème de Thalès », in *Grandeurs et Nombres*, IREM de Lille, Mai 2009.

Daniel DJAMENT, « Deux démonstrations du théorème de Pythagore », *Bulletin de l'APMEP*, n° 517, janvier-février 2016, p. 126-127.

Alexis CLAIRAUT, *Éléments de Géométrie* (1743) (2 tomes), « Les Maîtres de la Pensée Scientifique, Gauthier-Villars, Paris 1920.

Richard DEDEKIND, *La création des nombres*, introduction, traduction et notes par Houria Benis Sinaceur, « Mathesis », Vrin, Paris 2008.

EUCLIDE, *Les Œuvres d'Euclide*, traduction Peyrard, Nouveau tirage, introduction par Jean Itard, Blanchard, Paris 1993.

EUCLIDE, *Éléments*, volume 2, traduction et commentaire par Bernard Vitrac, PUF, Paris 1994.

Adrien-Marie LEGENDRE, *Éléments de Géométrie* (1794), douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823.

Jules TANNERY, *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* (1894), 7ème édition, Armand Colin, Paris 1917.

François VIÈTE, *Introduction en l'Art Analytique*, in VAULEZARD, *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète* (1630), Fayard, Paris 1986.