

1

Études

Plans finis

G. HEUZÉ

(Faculté des Sciences, Orléans)

0. Introduction.

Le présent article se propose de faire le point sur la question des plans (géométriques) finis.

Le premier paragraphe est une présentation, dans le cas général, des différentes situations combinatoires rencontrées dans cette étude.

Le deuxième paragraphe, après avoir défini différents objets algébriques, établit le lien entre ces objets et les situations combinatoires affines (c'est en effet l'aspect affine qui est le plus commode dans le cas où on cherche à « coordonner » un plan, tandis que dans les études combinatoires il est préférable de travailler sur l'aspect projectif). Une autre étude algébrique (que nous n'aborderons pas dans cet article) consisterait à étudier les groupes de transformations qui respectent les structures combinatoires.

Le troisième paragraphe s'intéresse alors aux plans finis.

Le quatrième paragraphe définit et étudie les (k, r, s) - plans introduits dans [3].

Signalons enfin des ouvrages où la question est étudiée : [1], [5], [10], [13], [15], [16] (voir bibliographie p. 213).

1. L'aspect combinatoire (cas général).

Définition : Un plan projectif est constitué de deux ensembles (un ensemble de « points » et un ensemble de « droites ») entre lesquels est définie une relation d'incidence vérifiant :

(P1) Deux points distincts sont incidents à une droite unique;

(P2) Deux droites distinctes sont incidentes à un point unique;

(P3) Il existe au moins 4 points dont 3 quelconques ne sont incidents à aucune droite.

On obtient immédiatement la proposition :

Il existe au moins 4 droites dont 3 quelconques ne sont incidentes à aucun point.

Par conséquent en échangeant les rôles de l'ensemble des points et de l'ensemble des droites, on obtient un nouveau plan projectif appelé *dual* du précédent.

La dualité étant dégagée, nous identifierons désormais toute droite avec l'ensemble des points qui y sont incidents. L'ensemble des droites devient alors une famille de parties de l'ensemble des points, la relation d'incidence devient la relation d'appartenance, et nous pouvons formuler (P1) (P2) (P3) plus simplement. Nous noterons \overline{ab} la droite passant par les points a et b (supposés distincts).

Définition : un plan affine est constitué d'un ensemble de « points » et d'une famille de parties de cet ensemble, appelées « droites », tel que :

(A1) Par deux points distincts il passe une droite unique;

(A2) Par tout point il passe une parallèle unique à une droite donnée (deux droites sont dites *parallèles* si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point commun).

(A3) Il existe au moins 3 points non alignés.

On obtient sans difficulté les propositions suivantes :

— *Le parallélisme est une relation d'équivalence* (on dit qu'une classe d'équivalence détermine une *direction*).

— *Si d'un plan projectif on retire une droite et les points de cette droite on obtient un plan affine.*

— *Si à un plan affine on adjoint un point par classe de parallèles (ce point, appelé *point à l'infini* de la direction correspondante, appartient à toutes les droites de la classe) et si on convient que l'ensemble des points à l'infini forme une droite (appelée *droite de l'infini*) on obtient un plan projectif.*

Définition : deux plans sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection de l'ensemble des points de l'un sur l'ensemble des points de l'autre qui transforme toute droite du premier en une droite du second.

Définition : un plan est dit *(a, L)-transitif* (a est un point, L est une droite) si la configuration de la figure 1 (dite *configuration de Desargues* et dessinée dans le cas projectif) est vraie quelles que soient les droites L_1, L_2, L_3 passant par a et les points $a_1 \in L_1, a_2 \in L_2, a_3 \in L_3, b_1 \in L_1$.

Remarquons que a peut appartenir à L .

On obtient facilement l'allure particulière de cette configuration dans le plan affine dont L est la droite de l'infini.

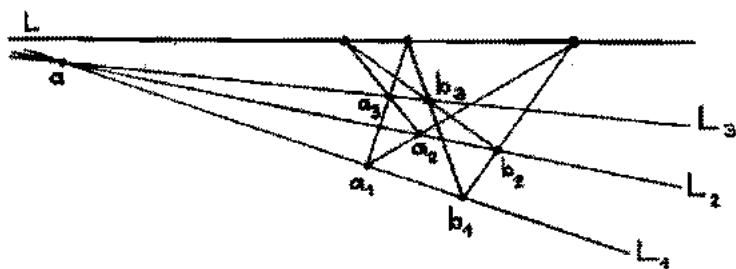


FIG. 1.

Définition : un plan affine est dit de *translation pour une direction*, si le plan projectif qui lui est associé est (a, L) -transitif, L étant la droite de l'infini et a le point de L correspondant à la direction en question.

La configuration correspondante est celle de la figure 2 (les droites L_1, L_2, L_3 sont parallèles (leur direction est celle de a), $\overline{a_1a_2}$ (resp. $\overline{a_1a_3}$; $\overline{a_2a_3}$) est parallèle à $\overline{b_1b_2}$ (resp. $\overline{b_1b_3}$; $\overline{b_2b_3}$)).

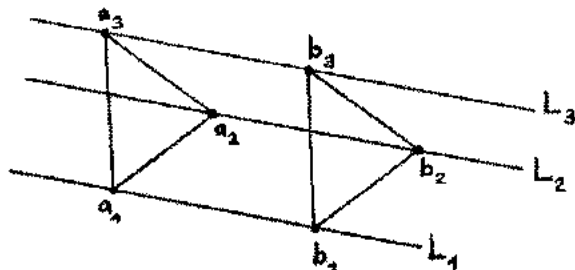


FIG. 2.

Définition : un plan affine est dit de *translation* s'il est de translation pour toute direction (en fait il suffit qu'il le soit pour deux directions distinctes).

Définition : un plan est dit *arguésien* s'il est (a, L) -transitif pour tout point a et toute droite L (ici encore on pourrait formuler des conditions suffisantes plus faibles).

Signalons aussi qu'il peut exister une situation intermédiaire (entre les cas « de translation » et arguésien) dite *micro-arguésienne* mais que nous ne retiendrons pas ici pour des raisons qui apparaîtront plus tard.

Définition : un plan est dit *pascalien* si la configuration de la figure 3 (dite *configuration de Pappus* et dessinée dans le cas affine) est vraie quels que soient les droites L_1, L_2 et les points $a_1 \in L_1, a_2 \in L_2, b_1 \in L_1, b_2 \in L_2$ ($\overline{a_1b_2}$ (resp. $\overline{a_2b_1}$; $\overline{a_1a_2}$) est parallèle à $\overline{b_1c_2}$ (resp. $\overline{b_2c_1}$; $\overline{c_1c_2}$)).

On montre, par des méthodes purement combinatoires (voir par exemple [7]), que tout plan pascalien est arguésien.

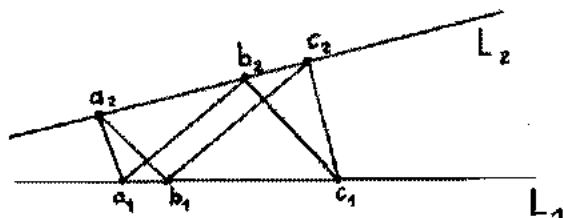


FIG. 3.

Il en résulte que nous avons présenté les diverses situations possibles par ordre de généralité décroissante.

2. Un aspect algébrique (cas général).

Avant d'énoncer les théorèmes établissant les liens entre situations combinatoires et structures algébriques il nous faut définir les objets algébriques non classiques qui vont « coordonner » les différents plans affines.

Définition: Un corps ternaire est un ensemble K , ayant deux éléments distingués distincts notés 0 et 1, muni d'une application $T : K^3 \rightarrow K$ vérifiant :

(C1) Quels que soient a et b de K ,

$$T(0, b, a) = T(b, 0, a) = T(1, a, 0) = T(a, 1, 0) = a$$

(C2) Quels que soient a, b, c de K ,

l'équation $T(a, b, x) = c$ a une solution unique;

(C3) Quels que soient a_1, a_2, b_1, b_2 de K tels que $a_1 \neq a_2$,

l'équation $T(a_1, x, b_1) = T(a_2, x, b_2)$ a une solution unique;

(C4) Quels que soient a_1, a_2, c_1, c_2 de K tels que $a_1 \neq a_2$,

le système $\begin{cases} T(x, a_1, y) = c_1 \\ T(x, a_2, y) = c_2 \end{cases}$ a une solution unique.

Définition: deux corps ternaires (K, T) et (K', T') sont dits isomorphes s'il existe une bijection s du premier sur le second telle que, quels que soient a, b, c de K , $T(a, b, c) = T'(s(a), s(b), s(c))$.

Définition: un groupe cartésien est un ensemble K , ayant deux éléments distingués distincts notés 0 et 1, muni de deux opérations $(+, \cdot)$ tel que :

(G1) K est un groupe (non abélien en général) pour l'opération $+$ dont 0 est l'élément neutre;

(G2) Quel que soit a de K ; $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$,

(G3) Quels que soient a_1 et a_2 de K (avec $a_1 \neq a_2$),

l'équation $-(a_1 \cdot x) + (a_2 \cdot x) = b$ a une solution unique;

(G4) Quels que soient a_1 et a_2 de K (avec $a_1 \neq a_2$),

l'équation $(x \cdot a_1) - (x \cdot a_2) = b$ a une solution unique.

Définition : un *quasi-corps droit* est un ensemble K , ayant deux éléments distingués distincts notés 0 et 1, muni de deux opérations $(+, \cdot)$ telles que :

(Q1) K est un groupe abélien pour l'opération $+$ dont 0 est l'élément neutre;

(Q2) Quel que soit a de K , $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ et $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

(Q3) Quels que soient a_1 et a_2 de K (avec $a_1 \neq a_2$),

l'équation $-(a_1 \cdot x) + (a_2 \cdot x) = b$ a une solution unique;

(Q4) Quels que soient a, b, c de K ,

$$a(b+c) = ab+ac;$$

(Q5) Quel que soit $a \neq 0$ de K ,

l'équation $xa = b$ a une solution unique.

Il est immédiat de vérifier que tout *quasi-corps droit* est un *groupe cartésien* et que tout *groupe cartésien* est un *corps ternaire*

$$[\text{en posant } T(a, b, c) = (a \cdot b) + c].$$

Signalons l'existence du *quasi-corps alternatif* « entre » le *quasi-corps droit* et le *corps*.

Définition : on appelle *repère* d'un plan affine un ensemble de trois points non alignés (dont l'existence est assurée par (A3)).

Théorème direct.

Toute structure combinatoire de plan affine projective, après choix d'un repère convenable, sur l'ensemble sous-jacent d'une droite quelconque une structure algébrique déterminée par la correspondance suivante (de ligne à ligne) :

Situation combinatoire :

- plan affine général;
- plan ayant une direction de translation;
- plan de translation;
- plan micro-arguésien;
- plan arguésien;
- plan pascalien.

Structure algébrique :

- corps ternaire;
- groupe cartésien (le repère est choisi en tenant compte de la direction de translation);
- quasi-corps droit;
- quasi-corps alternatif;
- corps;
- corps commutatif.

Signalons que deux corps ternaires coordonnant le même plan affine dans des repères différents peuvent ne pas être isomorphes.

Théorème réciproque.

Tout corps ternaire (K, T) détermine un plan affine de la façon suivante :

— l'ensemble des points est l'ensemble $K \times K$;

— une droite est constituée soit des couples (x_0, y) où x_0 est fixé, soit des couples (x, y) où $y = T(a, x, b)$, a et b étant fixés.

Le corps ternaire associé à ce plan affine dans le repère $(0, 0)$ $(1, 0)$ $(0, 1)$ est isomorphe à (K, T) .

Naturellement, si le corps ternaire a une structure plus riche, le plan affine associé a les propriétés qui ressortissent de la correspondance décrite plus haut.

3. Plans finis.

La première remarque à faire est la suivante :

Si dans un plan une droite a un nombre fini de points alors toute droite a le même nombre de points.

Définition : on appelle *ordre d'un plan affine (resp. projectif) fini* le nombre de points de chaque droite (resp. diminué de 1).

Ainsi le plan projectif associé au plan affine d'ordre k est lui-même d'ordre k .

On obtient facilement les résultats numériques suivants relatifs à un plan d'ordre k :

	<i>Cas affine</i>	<i>Cas projectif</i>
Nombre de points sur chaque droite	k	$k+1$
Nombre de droites passant par un point.....	$k+1$	$k+1$
Nombre de points dans le plan	k^2	k^2+k+1
Nombre de droites dans le plan	k^2+k	k^2+k+1

Le problème qui se pose alors est le suivant :

— pour quelles valeurs de k existe-t-il un plan d'ordre k ?

On peut répondre immédiatement :

Si k est primaire (c'est-à-dire de la forme p^r où p est premier) il existe au moins un plan d'ordre k (car il existe alors un corps fini d'ordre k). En fait tous les plans finis connus sont d'ordre primaire; mais il n'est pas démontré que tout plan fini est nécessairement d'ordre primaire.

Au sujet de l'existence des plans finis signalons le théorème ([5]) : *Si $k \equiv 1$ ou $2 \pmod{4}$ une condition nécessaire pour qu'il existe un plan fini d'ordre k est que k soit somme de deux carrés (dont l'un peut être nul).*

Ainsi il n'existe pas de plans d'ordre 6 (déjà conjecturé indirectement par Euler), 14, 21, 22,

L'examen de l'unicité éventuelle de plans d'ordre donné nous conduit à l'étude, dans le cas fini, des êtres algébriques coordonnant un plan affine. Signalons les résultats :

- Les axiomes (C4), (G4) et (Q5) sont alors superflus ([15]).
- Tout corps fini est commutatif (célèbre théorème de Wedderburn).
- Tout quasi-corps alternatif fini est un corps ([18]).
- Tout quasi-corps fini est d'ordre primaire ([16]).

Il en résulte les deux propriétés intermédiaires que les cas pascalien, arguésien et micro-arguésien sont alors confondus, ce qui explique que nous n'avons pas éprouvé le besoin de définir plans micro-arguésiens et quasi-corps alternatifs.

Signalons enfin que Hugues [12] (resp. Ostrom [14]) ont construits, pour certaines valeurs de $k = p^m$, des plans d'ordre k (a, L)-transitifs pour aucun couple (a, L) (resp. pour un couple (a, L) unique).

Il existe donc des corps ternaires finis qui ne sont pas groupes cartésiens et des groupes cartésiens finis qui ne sont pas quasi-corps.

En conclusion pour certaines valeurs de k (primaire), il existe au moins quatre plans finis d'ordre k non isomorphes.

4. (k, r, s)-plans.

Définition : un (k, r, s)-plan est constitué de deux ensembles (un ensemble de « points » et un ensemble de « droites ») entre lesquels est définie une relation d'incidence vérifiant :

- (B1) Deux points distincts sont incidents à une droite au plus;
- (B2) Toute droite est incidente à exactement k points;
- (B3) Tout point est incident à exactement r droites;
- (B4) Si le point a n'est pas incident à la droite L , il existe exactement s droites L_i et s points a_i ($s \geq 1$) vérifiant :
 a est incident à L_i , a_i est incident à L , a_i est incident à L_i .

On obtient aisément la propriété :

Deux droites distinctes sont incidentes à un point au plus.

Donc à tout (k, r, s)-plan se trouve associé un (r, k, s)-plan obtenu en échangeant les rôles de l'ensemble des points et de l'ensemble des droites.

Cette dualité étant dégagée, on va de nouveau identifier toute droite

avec l'ensemble des points qui y sont incidents. La relation d'incidence devient la relation d'appartenance. On peut alors formuler les axiomes (B1) (B2) (B3) (B4) plus simplement. (B4) par exemple devient :

Par tout point n'appartenant pas à la droite L il passe exactement s droites coupant L.

Signalons les propriétés (faciles à obtenir) :

- $1 \leq s \leq \inf(k, r)$;
- Pour que dans un (k, r, s) -plan deux droites distinctes se coupent toujours en un point il faut et il suffit que $s = r$;
- Pour que dans un (k, r, s) -plan il passe toujours une droite par deux points distincts il faut et il suffit que $s = k$;
- Pour que dans un (k, r, s) -plan le parallélisme soit une relation d'équivalence il faut et il suffit que $s = r-1$ (naturellement deux droites sont dites parallèles si elles sont confondues ou si leur intersection est vide).

Ainsi un plan affine (resp. projectif) d'ordre k est un $(k, k+1, k)$ -plan (resp. $(k+1, k+1, k+1)$ -plan), et réciproquement pour $k \geq 2$.

Mais il existe d'autres (k, r, s) plans (voir par exemple [11]).

Le problème de leur existence reste cependant largement ouvert.

Signalons à ce propos les résultats :

— Pour qu'il existe un (k, r, s) -plan il est nécessaire que

$$\frac{kr(k-1)(r-1)}{s(k+r-s-1)}, \quad \frac{(k-1)(k-s)((k-1)(r-1)+s)}{s(k+r-s-1)}, \quad \frac{k(k-1)(r-1)}{s},$$

$$\frac{(r-1)(r-s)((k-1)(r-1)+s)}{s(k+r-s+1)}, \quad \frac{(k-1)(r-1)}{s} \text{ soient entiers.}$$

(une de ces conditions s'obtient en remarquant qu'un (k, r, s) -plan a

$$k + \frac{k(k-1)(r-1)}{s} \text{ points.}$$

L'étude de l'existence des $(k, r, r-1)$ -plans (englobant celle des plans affines finis) a été abordée depuis longtemps (sous une autre optique il est vrai, et [9] fait le point sur la question). Remarquons qu'un $(k, r, r-1)$ -plan a k^2 points et définissons :

$R(k)$ = valeur maximum de r tel qu'il existe un $(k, r, r-1)$ -plan.

On a alors les résultats :

- Pour tout $k (\geq 2)$, $k+1 \geq R(k) \geq 3$;
- Si k est primaire $R(k) = k+1$;
- $R(k_1 k_2) \geq \inf(R(k_1), R(k_2))$;
- $R(6) = 3 (= R(2))$ [17];
- $R(k) \geq 4$ pour $k \geq 7$ [2];
- $\lim_{k \rightarrow \infty} R(k) = \infty$ [8];
- $R(k) \geq k+1 - (2k)^{\frac{1}{2}}$ entraîne $R(k) = k+1$ [4].

5. Conclusion.

Une des caractéristiques de cette étude est la mise en évidence d'un grand nombre de problèmes encore ouverts. Rappelons parmi eux (par ordre de généralité croissante) :

- Pour quelles valeurs de k existe-t-il un plan d'ordre k ?
- Combien y a-t-il alors de plans d'ordre k ?
- Quelle est la valeur de $R(k)$ pour tout entier k ? (elle n'est connue que pour k primaire et $k = 6$).
- Pour quelles valeurs de (k, r, s) existe-t-il un (k, r, s) -plan?

Répondons enfin à une crainte qui vient naturellement à l'esprit devant le nombre des situations que nous avons rencontrées en dimension 2 : « Les études similaires en dimension supérieure à 2 doivent être d'une complexité énorme ». Or il n'en est rien, car on montre (voir par exemple [7]) qu'à partir de la dimension 3 « tout est arguésien » et les espaces géométriques affines (resp. projectifs) définis par des propriétés combinatoires « naturelles » peuvent être identifiés à des espaces vectoriels de dimension finie (resp. aux espaces projectifs qui leur sont canoniquement associés).

Bibliographie

- [1] AERTN (E.). — *Algèbre géométrique*. Gauthier-Villars, Paris (1962).
- [2] BOSE, SRIKHANDER. — On the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of a conjecture of Euler. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1960), 191-207.
- [3] BOSE (R.C.). — Strongly Regular Graphs, Partial Geometries and Partially Balanced Designs. *Pacific J. Math.* (1963), 389-420.
- [4] BRUCK (R.H.). — Finite nets II; Uniqueness and imbedding. *Pacific J. Math.* (1963), 421-458.
- [5] BRUCK, RYSER. — The non existence of certain projective planes. *Canadian J. Math.* (1949), 88-93.
- [6] DEMBOWSKI (P.). — *Finite Geometries*, Springer, Berlin (1968).
- [7] DUBREIL-JACOTIN, LEBEUR, CROISOT. — *Leçons sur la théorie des treillis*. Gauthier-Villars, Paris (1953).
- [8] CHOWLA, ERDOS, STRAUS. — On the maximal number of pairwise orthogonal Latin squares of a given order. *Canadian J. Math.* (1960), 204-208.
- [9] GUÉRIN (R.). — Existence et propriétés des carrés latins orthogonaux. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris* (1966).
- [10] HALL (M.). — *The theory of groups*. Mac Millan Company, New-York (1959).
- [11] HEUZÉ (G.). — Contribution à l'étude des schémas d'association. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris* (1966), 1-59.
- [12] HUGHES (D.R.). — A class of non-desarguesian projective planes. *Canadian J. Math.* (1957), 378-388.
- [13] LEBEUR (L.). — *Algèbre géométrique*. Publications du Département de Math. d'Orsay (1966).
- [14] OSTROM (T.G.). — Finite planes with a single (p, l) — transitivity. *Arch. der Math.* (1964), 378-384.
- [15] PICKERT (G.). — *Projektive Ebenen*. Springer, Berlin (1955).
- [16] SEGRE, LOMBARDO-RADICE. — *Lectures on modern geometry*. Gemonese, Rome (1961).
- [17] TARRY (G.). — Le problème des 36 officiers. *C.R. Assoc. Franç. Avanc. Sci.* (1901), 170-203.
- [18] ZORN (M.). — Theorie der alternative rings. *Abh. Math. Seminar. Univ. Hamburg.* (1933), 395-402.

N.D.L.R. — *L'élaboration des nouveaux programmes de mathématiques, en particulier ceux envisagés pour les seconds cycles secondaires ont donné, donnent, donneront, lieu — et c'est bien ainsi — à de nombreux échanges d'idées. Il semble cependant que le " point le plus sensible " soit celui concernant l'enseignement de la géométrie. Aussi convient-il de remercier J. Lelong-Ferrand (Faculté des Sciences de Paris) et J. Frenkel (I.R.E.M. de Strasbourg) d'avoir accepté, à l'intention de tous les collègues intéressés, la publication des " notes " très " vivantes " qu'ils échangèrent à ce propos.*

P. V.