

Courbes étranges, ensembles minces

J.-P. KAHANE (Faculté des Sciences d'Orsay)

« Einstein et Smoluekowski ont caractérisé de la même façon l'activité du mouvement brownien. Jusqu'alors on s'était efforcé de définir une « vitesse moyenne d'agitation » en suivant aussi exactement que possible le trajet d'un grain. Les évaluations ainsi obtenues étaient toujours de quelques microns par seconde pour des grains de l'ordre du micron.

Mais de telles évaluations sont grossièrement fausses. L'enchevêtrement de la trajectoire est tel que la trajectoire notée est toujours infiniment plus simple et plus courte que la trajectoire réelle. En particulier, quand la durée qui sépare deux pointés d'un même grain décroît, la vitesse moyenne de ce grain pendant cette durée, loin de tendre vers une limite, grandit sans cesse, et varie follement en direction, comme on le voit de façon simple, en notant les positions d'un grain à la chambre claire de minute en minute, puis, par exemple, de 5 en 5 secondes, et mieux encore en les photographiant de vingtaine en vingtaine de secondes, comme ont fait Victor Henri, Comandon ou M. de Broglie, pour cinématographier le mouvement. On voit du même coup que l'on ne peut fixer une tangente en aucun point de la trajectoire, et c'est un cas où il est vraiment

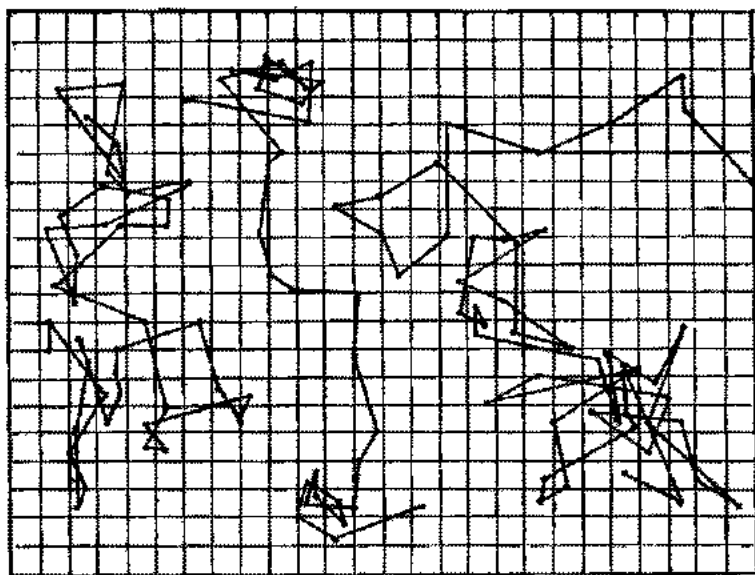


FIG. 1.

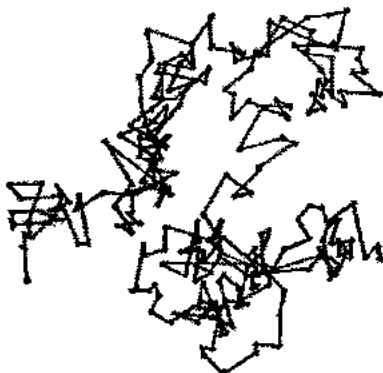


FIG. 2.

naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer...

... Si probable que parut la vérification, elle était utile, et d'ailleurs très facile. Il suffit de noter à la « chambre claire » la position d'un même grain à intervalles de temps égaux. A titre d'exemple, j'ai réuni sur la figure ci-contre (1908), où 16 divisions représentent 50 microns, 3 dessins obtenus en traçant les projections horizontales (1).

Incidemment, une telle figure, et même le dessin suivant (2), où se trouvent reportés à une échelle arbitraire un plus grand nombre de déplacements, ne donnent qu'une idée bien affaiblie du prodigieux enchevêtrement de la trajectoire réelle. Si en effet on faisait des pointés en des intervalles de temps 100 fois plus rapprochés, chaque segment serait remplacé par un contour polygonal relativement aussi compliqué que le dessin entier, et ainsi de suite. On voit comment s'évanouit en de pareils cas la notion de tangente à une trajectoire...

... On fera des réflexions analogues pour toutes les propriétés qui, à notre échelle, semblent régulièrement continues, telles que la vitesse, la pression, la température. Et nous les verrons devenir de plus en plus irrégulières, à mesure que nous augmenterons le grossissement de l'image toujours imparfaite que nous nous faisons de l'Univers. La densité était nulle en tout point, sauf exceptions; plus généralement, la fonction qui représente la propriété physique étudiée (mattons que ce soit le potentiel électrique) formera dans toute matière un continuum présentant une infinité de points singuliers, et dont les mathématiciens nous permettront de poursuivre l'étude. »

J. FERRIN, *Atomes* (1912 et 1935), pp. 138-139, 142-143 et XXII-XXIII.

« Parmi les notions étranges dues à Cantor, la plus utilement applicable aux besoins de l'analyse classique est certainement celle de l'ensemble parfait totalement discontinu...

... Le lecteur désirera peut-être savoir ce que sont ces ensembles parfaits. Qu'il imagine une barre rectiligne de section idéalement fine. On ouvre en elle, vers le milieu, une brèche, qui laisse subsister deux fragments de la barre. On suppose que la portion de ceux-ci est restée invariable pendant l'opération. Dans chacun des deux fragments, aux environs de leur milieu, on ouvre une nouvelle brèche. On obtient quatre fragments conservant exactement leur position primitive. Et l'on recommence sans trêve. La barre est indéfiniment rompue. Mais, et c'est là le prodige de Cantor, elle ne disparaît pas toute. Ce qui reste est un ensemble parfait totalement discontinu.

(1) Voir fig. 1.

(2) Voir fig. 2.

Où encore, dans un bloc solide, on pratique une ou plusieurs fissures que l'on vide de leur substance. Il reste plusieurs solides distincts, deux à deux dans contact mutuel mais dont la position est supposée inchangée, identique à celle qu'ils occupaient dans le solide initial. Sur chacun de ces solides subdivisionnaires, on répète le fissurage, et ainsi indéfiniment. Il reste un ensemble parfait, totalement discontinu moyennant certaines précautions dans le tracé des fissures. De loin, c'est un bloc, d'un peu plus près, c'est plusieurs blocs : au fur et à mesure que l'on s'en approche davantage, c'est un nombre croissant de blocs distincts. En réalité, c'est une poussière. Mais cette poussière, si on la tassait, pourrait remplir un volume et avoir la masse d'une matière dense continue.

Cette sorte de configuration jouit de beaucoup de propriétés de la substance continue. Elle paraît correspondre à de très profondes réalités. »

A. DENJOY, *Éloge de Poincaré* (1934), Hommes, forme et le nombre, pp. 86-87.

« When measuring the left bank of the Vistula on a school map of Poland, we get a length which is appreciably smaller than that read on a map 1:200 000... The left bank of the Vistula, when measured with increased precision, would furnish lengths 10, 100 and even 1 000 times as great as the length read off the school map. A statement nearly adequate of reality would be to call most arcs encountered in nature not rectifiable. »

H. STEINHAUS, Length, shape and area, *Coll. Math.* 3 (1954), pp. 1-13.

En 1872, Weierstrass avait donné le premier exemple d'une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point. Il s'agissait de la somme d'une série trigonométrique lacunaire, objet d'analyse assez étrange pour l'époque. L'exemple de Weierstrass suggérait l'existence de courbes simples n'admettant de tangente en aucun point. En 1904, Von Koch donna un exemple simple d'une telle courbe, au moyen d'une construction géométrique que je vais d'abord rappeler [1].

On part d'un segment AB du plan, horizontal. On le divise en trois parties égales au moyen des points C et D. Soit E le sommet du triangle équilatéral construit au-dessus de la base CD. La première étape de la construction consiste à remplacer AB par la ligne polygonale ACEDB.

A la nième étape, on part d'une ligne polygonale Γ_n joignant A et B, orientée de A à B, ayant 4^n côtés. Soit FG un tel côté. On répète sur le segment orienté FG, par similitude, la construction faite sur AB lors de la première étape : on obtient une ligne polygonale F...G, que l'on substitue à FG. Une fois l'opération faite sur tous les côtés de la ligne polygonale Γ_n , on obtient une nouvelle ligne polygonale Γ_{n+1} joignant A et B, de 4^{n+1} côtés.

Chacune des lignes polygonales Γ_n admet un paramétrage naturel au moyen du segment $[0, 1]$: l'image $M_n(t)$ du point t est la position au temps t d'un mobile qui parcourt Γ_n à vitesse constante, partant au temps $t = 0$ du point A pour aboutir au point B au temps $t = 1$.

Lorsque n tend vers l'infini, $M_n(t)$ tend vers une limite $M(t)$, fonction continue et bijective du point t (le lecteur pourra s'en assurer par lui-même ou à la rigueur se référer aux calculs donnés dans l'appendice 1). La trajectoire

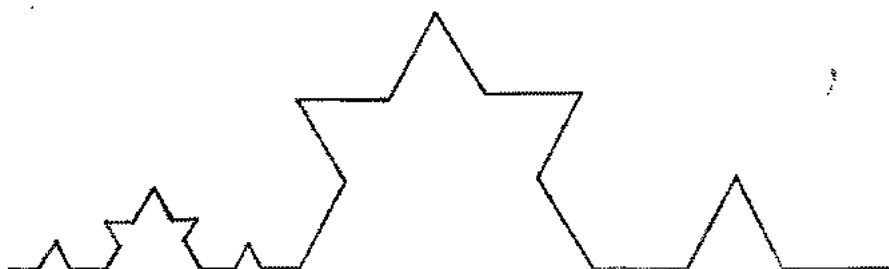


FIG. 1.

de $M(t)$ est la courbe de von Koch Γ . Observons que les sommets des lignes polygonales Γ_n sont des points de Γ (fig. 1).

La courbe Γ est contenue dans le disque de diamètre AB . Elle jouit d'une propriété bien intéressante. Si on la regarde à l'œil nu, à la loupe, au microscope, c'est toujours la même courbe que l'on voit! Si FG est, comme tout à l'heure, un segment de la ligne polygonale Γ_n , F et G sont extrémités d'un arc de Γ semblables à Γ (et donc contenu dans le disque de diamètre FG).

Soit M un point de Γ ; soient F_n et G_n deux sommets consécutifs de Γ_n , respectivement précédant et suivant M sur Γ , et soit H_n le « milieu » de l'arc $F_n G_n$, c'est-à-dire le point de l'arc $F_n \dots G_n$ de Γ_{n+1} équidistant de F_n et de G_n . Alors deux au moins des trois droites MF_n , MG_n , MH_n sont bien définies (rien n'empêche M d'être en l'un des points F_n , G_n , H_n , mais il ne saurait être en deux à la fois), et font un angle supérieur à $\frac{\pi}{100}$ (parce que M est dans le disque de diamètre $F_n G_n$) (fig. 2). Il s'ensuit que Γ n'admet pas de tangente en M .

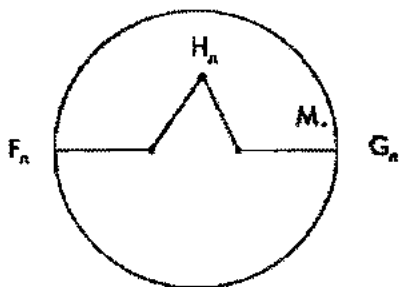


FIG. 2.

Nous avons déjà remarqué que l'arc AC de Γ est homothétique de Γ dans le rapport $\frac{1}{3}$. On est tenté de dire, dans ce sens, que c'est le tiers de Γ . D'autre part, les arcs AC , CE , ED , DB sont égaux. Dans ce sens, chacun d'eux est le quart de Γ .

Examinons de plus près ce petit paradoxe. Si l est la longueur de Γ , la

longueur l' de l'arc AC est $\frac{l}{3}$, par homothétie. C'est aussi $\frac{l}{4}$, par égalité des arcs AC, CE, ED, DB. Le paradoxe se lève immédiatement : $l = \infty$, la courbe Γ n'est pas rectifiable, ce qu'on vérifie bien facilement (appendice 2).

* * *

Revenons sur la propriété d'homogénéité mise en évidence : quand on prive Γ de son extrémité B, on obtient une figure Γ' qui admet une partition en quatre classes égales (les arcs AC, CE, ED, DB, privés de leurs extrémités droites) qui lui sont semblables dans le rapport $\frac{1}{3}$.

Cette propriété d'homogénéité (existence d'une partition en n classes égales, chacune semblable à l'ensemble dans un rapport ξ) se rencontre aussi à propos de l'ensemble de Cantor et de ses généralisations.

Rappelons la construction de l'ensemble triadique de Cantor sur le segment $[0, 1]$ de la droite réelle. A la première étape, on ôte du segment $[0, 1]$ l'intervalle ouvert $\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[$; on obtient ainsi deux segments. A la seconde étape, on répète la même dissection sur chacun de ces segments : on obtient quatre segments. A la n -ième étape, on a un ensemble E_n constitué par 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} (« intervalles blancs ») séparés par des intervalles ouverts (« intervalles noirs »), et on passe de E_n à E_{n+1} en supprimant de chacun des intervalles blancs constituant E_n l'intervalle ouvert de même milieu et de longueur 3^{-n-1} . Les ensembles E_n sont des ensembles fermés, emboîtés décroissants. Leur intersection est le célèbre ensemble triadique de Cantor, modèle des ensembles parfaits totalement discontinus dont parle A. Denjoy dans son éloge de Painlevé (appendice 3). On le notera $E_{(1/3)}$. A une homothétie près, c'est l'intersection de la courbe de von Koch et du segment AB.

Une définition plus rapide de $E_{(1/3)}$ est la suivante : c'est l'ensemble des nombres

$$\left\{ \sum_1^{\infty} \frac{2\epsilon_n}{3^n} ; \epsilon_n = 0 \text{ ou } 1 \right\},$$

c'est-à-dire des nombres compris entre 0 et 1 qui, dans le système de numération à base 3, peuvent s'écrire à l'aide de 0 et de 2 uniquement (au contraire de certaines conventions, il faut admettre ici un développement ne contenant qu'un nombre fini de 0).

Plus généralement, si $0 < \xi < \frac{1}{2}$, on note $E_{(\xi)}$ l'intersection des ensembles E_n ainsi définis : $E_0 = [0, 1]$, E_n est réunion de 2^n segments disjoints, et l'on passe de E_n à E_{n+1} en remplaçant chacun de ces segments par la réunion des deux segments qui lui correspondent dans les homothéties de rapport ξ ayant

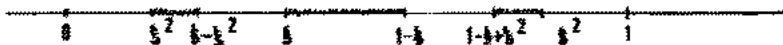


FIG. 3. — Courbe de Peano, bousculée suivant J.-P. Schreiber

pour centres ses extrémités (fig. 3). On peut encore définir $E_{(\xi)}$ comme l'ensemble des nombres

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \xi^{n-1} (1-\xi); \quad \varepsilon_n = 0 \text{ ou } 1 \right\}.$$

La construction par étapes des ensembles $E_{(\xi)}^k$ (contenus dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$) est indiquée sur la figure 4 dans le cas $\xi = \frac{1}{3}$.

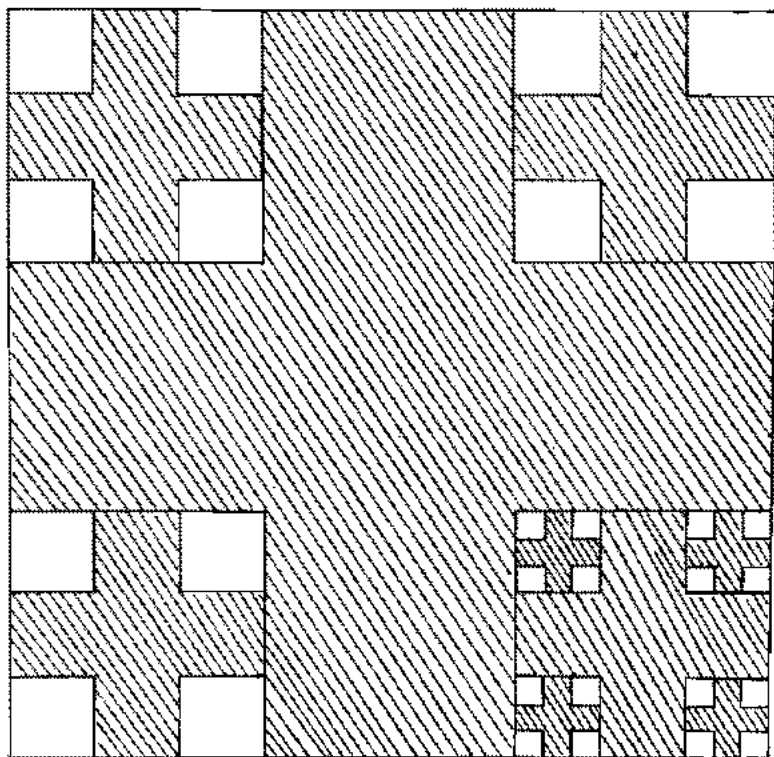


FIG. 4.

Précisément, l'ensemble $E_{(\frac{1}{3})}^k$ a la même propriété que la courbe de Von Koch Γ : c'est, de façon évidente, la réunion disjointe de quatre parties qui lui sont homothétiques dans le rapport $\frac{1}{3}$. De manière analogue, $E_{(\xi)}$ admet une partition en deux classes qui lui sont homothétiques dans le rapport ξ .

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n) \\ &= n \mu(E_1).\end{aligned}$$

On est tenté de définir la mesure μ pour tous les ensembles semblables à E , en convenant que $\mu(E') = \frac{1}{n} \mu(E)$ lorsque E' est semblable à E dans le rapport ξ , $\mu(E') = \frac{1}{n^2} \mu(E)$ lorsque E' est semblable à E dans le rapport ξ^2 , etc., et généralement

$$\mu(E') = \lambda^\alpha \mu(E) \quad \left(\alpha = \frac{\log(1/\xi)}{\log n} \right)$$

lorsque E' est semblable à E dans le rapport λ .

Il est alors naturel d'appeler α la « dimension » de E . Avec cette convention, la courbe de Von Koch et le carré de l'ensemble triadique de Cantor ont même dimension $\frac{\log 4}{\log 3}$, le carré de l'ensemble $E_{(1/4)}$ a pour dimension 1, comme un intervalle, etc.

* * *

La notion de dimension non entière a été introduit par Hausdorff en 1916 [3]. Indiquons-la rapidement, en nous bornant à des ensembles plans (mutatis mutandis, tout vaut pour des espaces métriques).

Soit E un ensemble plan, α un nombre entre 0 et 2 ($0 < \alpha < 2$). Pour tout $\epsilon > 0$, recouvrons E à l'aide de disques de diamètres $\delta_j \leq \epsilon$, et associons au recouvrement la somme $\sum \delta_j^\alpha$ (finie ou infinie). La borne inférieure de ces sommes, pour tous les recouvrements compatibles avec la condition $\delta \leq \epsilon$, est notée $H_\alpha^\epsilon(E)$. On a $0 < H_\alpha^\epsilon(E) < \infty$. Quand ϵ décroît, $H_\alpha^\epsilon(E)$ ne peut que croître. Soit $H^\alpha(E)$ sa limite; on a encore

$$0 < H^\alpha(E) < \infty;$$

c'est, par définition, la mesure de E en dimension α (pour $\alpha = 1$, elle coïncide avec la mesure linéaire dans les cas usuels; pour $\alpha = 2$, elle est proportionnelle dans le rapport $\frac{4}{\pi}$ à la mesure superficielle; elle a, dans le cas général, les propriétés d'une mesure extérieure au sens de Lebesgue).

Quand α varie entre 0 et 2, $H^{(\alpha)}(E)$ décroît. De plus, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} H^{(\alpha)}(E) < \infty & \quad \text{et} \quad \alpha' > \alpha \Rightarrow H^{(\alpha')}(\mathbb{E}) = 0 \\ H^{(\alpha)}(E) > 0 & \quad \text{et} \quad \alpha' < \alpha \Rightarrow H^{(\alpha')}(\mathbb{E}) = \infty. \end{aligned}$$

La coupure α_0 entre les α pour lesquels $H^{(\alpha)}(E) = \infty$ et les α pour lesquels $H^{(\alpha)}(E) = 0$ (avec les définitions raisonnables des cas $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_0 = 2$) s'appelle la dimension de Hausdorff de E .

La dimension ainsi définie est effectivement calculable pour les $E_{(2)}$, les $E_{(2)}^k$, les compacts homogènes sur \mathbb{R} , la courbe de Von Koch, et donne bien les résultats attendus d'après le paragraphe précédent (voir appendice 4).

*
*
*

Il existe des applications continues du segment $[0, 1]$ dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ qui ont la propriété de doubler la dimension, c'est-à-dire telles que l'image de tout compact K de $[0, 1]$ ait une dimension double de celle de K [4], [5].

L'exemple le plus simple est fourni par la courbe de Peano, dont voici la construction. On part du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ et de sa diagonale d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité $(1, 1)$. On divise ce carré en 9 sous-carrés de côté $\frac{1}{3}$, numérotés et munis de diagonales orientées comme l'indique la figure 5. Sur chacun des carrés on répète la même opération, et ainsi de suite. A la n -ième étape, on a 9^n carrés de côté $\frac{1}{3^n}$, numérotés de façon que chacun soit adjacent au suivant, et les diagonales orientées forment, lorsqu'on les parcourt dans l'ordre de numérotation des carrés, une ligne polygonale L_n joignant $(0, 0)$ à $(1, 1)$. On obtient la courbe de Peano à partir des L_n comme on a obtenu la courbe de Von Koch Γ à partir des lignes polygonales F_n (voir appendice 1).

Il y a une grande différence. La courbe de Von Koch est une courbe simple, tandis que la courbe de Peano admet pour points multiples tous les points frontières d'un des carrés de subdivision — à l'exception des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$ —. De plus — c'est la propriété paradoxale de la courbe de

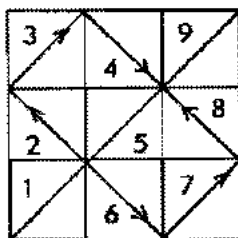


FIG. 5.

Peano — elle recouvre tout le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Pour le voir, on choisit un point quelconque M dans le carré; M appartient à un carré C_1 de la première étape, d'ordre a_1 ($a_1 = 1, 2, \dots, 9$), puis à un carré C_2 de la seconde étape, contenu dans C_1 et d'ordre a_2 , etc.; c'est alors l'image du point

$$t = \sum_1^{\infty} \frac{a_n - 1}{9^n}.$$

En effet, l'image de t dans Γ_n se trouve sur la diagonale distinguée du carré C_n .

Ainsi, f étant la fonction de paramétrage, $f([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$. On peut vérifier que, pour tout sous-compact K de $[0, 1]$, on a

$$\dim f(K) = 2 \dim K \quad [4].$$

A titre d'exercice, on peut aussi vérifier que f transforme l'ensemble de Cantor $E_{(1/3)}$ en son carré.

Il n'existe aucune courbe simple qui recouvre un carré. En effet, si C est une courbe simple, tout point de C autre qu'une extrémité la divise en deux parties, tandis qu'un point ne divise pas le carré (en termes plus savants, le complémentaire d'un point admet deux composantes connexes dans le premier cas, une seule dans le second).

Mais il existe des courbes simples d'aire positive. La figure 6 en suggère la construction, en bousculant un peu, de façon à les séparer, les carrés qui servent à la construction de la courbe de Peano. Si cette construction est bien opérée, on obtient encore $\dim f(K) = 2 \dim f(K)$ [4].

Un autre exemple, non constructif mais plus naturel dans un sens, est fourni par le mouvement brownien plan. La fonction du mouvement brownien plan est une fonction aléatoire du temps, c'est-à-dire qu'elle est en fait fonction de deux variables t (le temps) et ω (le hasard); soit $X(t, \omega)$. Pour sa définition et ses principales propriétés, on peut consulter [5]. Suivant l'intuition de J. Perrin, on a pu démontrer que, pour presque tout ω , $X(t, \omega)$ est une fonc-

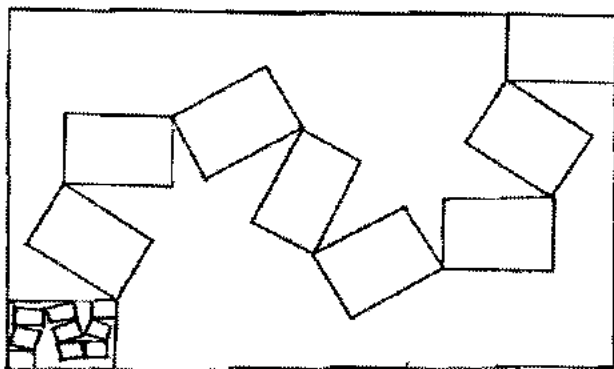


FIG. 6.

tion continue de f qui n'est différentiable nulle part (Paley-Wiener-Zygmund). Pour presque tout ω encore, la fonction $t \rightarrow X(t, \omega)$ double la dimension des compacts; la démonstration est un peu plus difficile que dans les cas précédents [6].



Revenons à des questions plus élémentaires. Un problème célèbre (Kakeya) est de construire un domaine plan, d'aire aussi petite que possible, où l'on puisse mouvoir une aiguille de façon à la placer dans n'importe quelle direction. Une variante consiste à construire un fermé plan, d'aire nulle, qui contienne un segment de longueur donnée dans n'importe quelle direction.

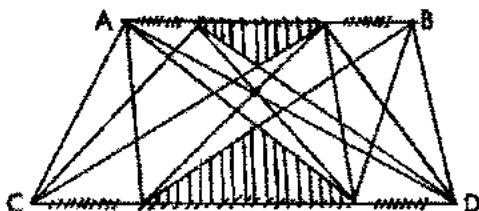


FIG. 7.

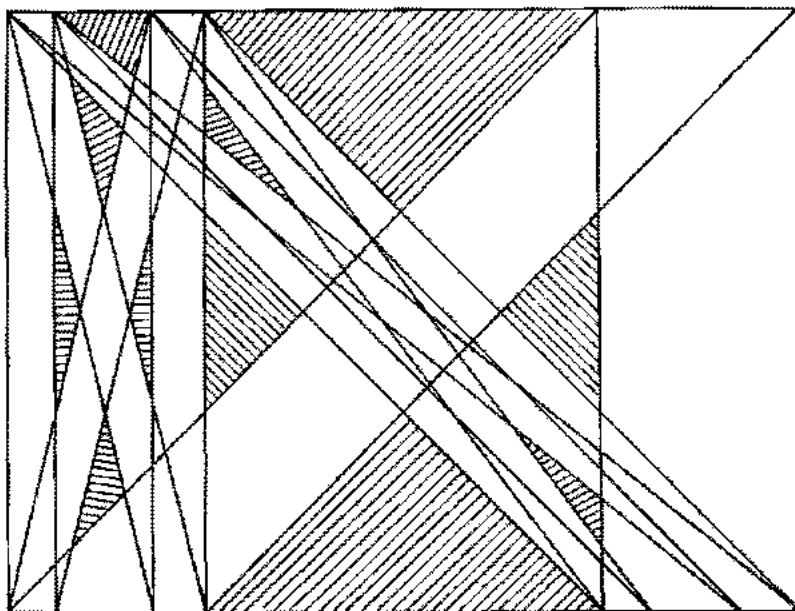


FIG. 8. — Segments joignant deux ensembles parfaits symétriques de rapport de dissection $\frac{1}{4}$, portés par des droites parallèles.

L'ensemble $E_{(1,0)} = \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{3e_n}{4^n}; e_n \in \{0,1\} \right\}$ peut servir à la solution. Considérons deux homothétiques de l'ensemble $E_{(1,0)}$, portés par des segments parallèles et non colinéaires AB et CD; désignons-les par E_1 et E_2 . On démontre alors que l'ensemble F réunion des segments qui s'appuient sur E_1 et E_2 (c'est-à-dire qui ont une extrémité sur E_1 et l'autre sur E_2) est fermé, d'aire nulle, et qu'il contient un segment translaté de tout segment qui s'appuie sur AB et CD [7] (fig. 7 et 8).

Quitte à réunir deux ensembles du type F, construits à partir de couples de segments convenables, on obtient bien un ensemble fermé d'aire nulle contenant un segment de longueur 1 dans toute direction.



Les courbes et ensembles que nous avons décrits jouent un rôle important en analyse mathématique; c'est une source constante d'exemples et de contre-exemples.

Fournissent-ils un modèle adapté à certains domaines de la réalité? On a déjà vu une certaine parenté entre la courbe de Peano et celle du mouvement brownien, et il est bon de signaler que l'éloquente description de Jean Perrin a motivé le travail de N. Wiener sur l'irrégularité locale du mouvement brownien.

Je me bornerai à une question de géographie, suggérée par les remarques de Steinhaus et développée par B. Mandelbrot dans [8].

En 1961, un géographe anglais, L. F. Richardson, s'avisa de comparer certains tracés naturels (la côte australienne, celle de l'Afrique du Sud, celle de l'Ouest de l'Angleterre) au moyen du procédé suivant. Pour une suite de $\varepsilon > 0$ (par exemple $\varepsilon = 1\ 000$ km, 100 km, 10 km, 1 km), on calcule L_ε , longueur de la plus petite ligne polygonale de côté ε inscrite dans le tracé. On observe que $\log L_\varepsilon$ est approximativement une fonction linéaire de $\log \frac{1}{\varepsilon}$; la pente est 0,02 pour la côte de l'Afrique du Sud, 0,13 pour la côte australienne, 0,25 pour celle de l'Ouest de l'Angleterre. B. Mandelbrot a proposé de considérer respectivement 1,02, 1,13 et 1,25 comme les dimensions des côtes en question. Une justification heuristique est que, si une côte avait exactement la forme de la courbe de Von Koch, on obtiendrait ainsi sa dimension de Hausdorff.

Plusieurs fonctions, ou quantités, peuvent être utilisées pour comparer des courbes simples tels que les tracés géographiques. On peut utiliser L_ε , et les quantités

$$\alpha = 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log L_\varepsilon}{\log 1/\varepsilon}, \quad \bar{\alpha} = 1 + \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log L_\varepsilon}{\log 1/\varepsilon}.$$

On peut aussi considérer N_ϵ , nombre minimum de disques de diamètre ϵ permettant de recouvrir la courbe,

$$\underline{\beta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon}{\log 1/\epsilon}, \quad \bar{\beta} = \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon}{\log 1/\epsilon}.$$

La fonction $\log N_\epsilon$ est l' ϵ -entropie selon Kolmogoroff. On peut enfin considérer la dimension de Hausdorff γ . On a des inégalités faciles :

$$\underline{\alpha} < \underline{\beta}, \quad \bar{\alpha} < \bar{\beta}, \quad \bar{\gamma} < \bar{\beta}.$$

Malheureusement, on peut avoir les égalités $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = \underline{\beta} = \bar{\beta}$ sans avoir $\gamma = \underline{\alpha}$: cela tient à ce que la courbe peut être méchante seulement au voisinage d'un point.

En fait, une petite théorie est nécessaire, et elle n'est pas encore faite. Le point de départ serait le suivant (simple transcription d'un théorème de Frostman; voir appendice 4) : la dimension de Hausdorff d'une courbe simple C est la borne supérieure des $K > 0$ tels que C admette un paramétrage $M(t)$ ($0 < t < 1$) ayant la propriété suivante : il existe un $c > 0$ tel que, pour tout disque D du plan, l'ensemble des t tels que $M(t)$ appartienne à D ait une mesure inférieure ou égale à c (diam. D) ^{K} . A l'aide de cette caractérisation de γ , des hypothèses convenables doivent permettre d'affirmer les égalités $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = \underline{\beta} = \bar{\beta} = \gamma$; ces hypothèses restent à expliciter. La courbe de Von Koch et les courbes analogues donnant des exemples où elles doivent être satisfaites.

Cette question ouverte servira de conclusion.

Appendice 1.

Soient $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$, p nombres complexes de même module ρ ($0 < \rho < 1$) et de somme 1. On pose $s_k = \sum_{j=0}^{k-1} \zeta_j$
(donc $s_1 = 0, s_2 = \zeta_1, \dots, s_p = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{p-1} = 1 - \zeta_p$).

Au nombre

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n - 1}{p^n} \quad (t_n = 1, 2, \dots, p)$$

on associe

$$z(t) = s_{t_1} + \zeta_{t_1} s_{t_2} + \zeta_{t_1 t_2} + \dots$$

En vertu de l'égalité

$$s_p + \zeta_p s_p + \zeta_p^2 s_p + \dots = 1,$$

on obtient la même valeur $z(t)$ lorsque, t étant de la forme $\frac{a}{p^m}$ (a entier), on lui associe la suite t_n presque toujours égale à 1 ou la suite t_n presque toujours égale à p . Si t et t' appartiennent au même intervalle $\left[\frac{a}{p^m}, \frac{a+1}{p^m} \right]$, on peut choisir

les t_i et t'_i de façon que $t_1 = t'_1, \dots, t_m = t'_m$ (en général, le choix est imposé); il s'ensuit que

$$|z(t) - z(t')| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} (\zeta_{t_1} \dots \zeta_{t_{k-1}} s_{t_k} - \zeta_{t'_1} \dots \zeta_{t'_{k-1}} s_{t'_k}) \right| < b\rho^m,$$

où $b = 2(1-\rho)^{-1} \sup_k |s_k|$. Donc l'application $t \rightarrow z(t)$ est continue sur $[0, 1]$.

Elle est même lipschitzienne d'ordre $\lambda = \frac{-\log \rho}{\log p}$, c'est-à-dire que, quels que soient t et t' , on a

$$|z(t) - z(t')| < c|t - t'|^\lambda,$$

c ne dépendant pas de (t, t') .

La courbe de Von Koch construite sur $[0, 1]$ correspond à $p = 4$, $\zeta_1 = \frac{1}{3}$, $\zeta_2 = \frac{1}{3} e^{\frac{i\pi}{3}}$, $\zeta_3 = \frac{1}{3} e^{-\frac{i\pi}{3}}$, $\zeta_4 = \frac{1}{3}$. La courbe de Peano inscrite dans le carré de diagonale $[0, 1]$ correspond à

$$p = 9, \quad \zeta_1 = \frac{1}{3}, \quad \zeta_2 = \frac{i}{3}, \quad \zeta_3 = \frac{1}{3}, \quad \zeta_4 = \frac{-i}{3}, \\ \zeta_5 = \frac{-1}{3}, \quad \zeta_6 = \frac{-i}{3}, \quad \zeta_7 = \frac{1}{3}, \quad \zeta_8 = \frac{i}{3}, \quad \zeta_9 = \frac{1}{3}.$$

Soit encore $t \in \left[\frac{a}{p^m}, \frac{a+1}{p^m} \right]$ et soit $\theta = \frac{a}{p^m}$. L'égalité

$$(*) \quad z(t) - z(\theta) = \zeta_{\theta} \zeta_{\theta+\frac{1}{p^m}} \dots \zeta_{\theta+\frac{a-1}{p^m}} z(p^m(t-\theta))$$

exprime que l'arc décrit par t variant dans cet intervalle est semblable à la courbe entière (décrite quand t varie de 0 à 1). C'est la propriété principale, à partir de laquelle on retrouve la construction géométrique. La ligne polygonale d'ordre m approchant la courbe a pour sommets les points

$$z(\theta) \quad \left(\theta = \frac{a}{p^m}, a = 0, 1, \dots, p^m \right),$$

et le paramétrage naturel en est la fonction $z_m(t)$, linéaire sur les intervalles $\left[\frac{a}{p^m}, \frac{a+1}{p^m} \right]$, et prenant aux points θ les valeurs $z(\theta)$. Il est immédiat que $z_m(t)$ converge uniformément vers $z(t)$ quand m tend vers l'infini.

Si l'on a $z(t) = z(t')$, t et t' appartenant à l'intervalle $\left[\theta, \theta + \frac{1}{p^m} \right]$, où $\theta = \frac{a}{p^m}$, la formule (*) montre que $z(T) = z(T')$, où $T = p^m(t-\theta)$, $T' = p^m(t'-\theta)$. Il s'ensuit que si la courbe décrite par $z(t)$ a un point double,

deux au moins des p arcs décrits quand $\frac{j}{p} < t < \frac{j+1}{p}$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$) se coupent. Pour que la courbe soit simple, il est donc nécessaire et suffisant qu'elle soit contenue, à l'exception de ses extrémités ($t = 0, t = 1$), dans un ensemble E tel que les p ensembles $s_j + \zeta_j E$ ($j = 1, 2, \dots, p$) soient deux à deux disjoints. Cette condition est satisfaite pour la courbe de von Koch en prenant pour E l'intérieur du triangle équilatéral de sommets $0, 1, e^{\frac{i\pi}{3}}$, complété par l'intervalle ouvert $(0, 1)$.

Appendice 2.

La longueur de Γ_n est $|AB|4^n 3^{-n}$, qui tend vers l'infini quand $n \rightarrow \infty$.

Un théorème de Lebesgue dit d'ailleurs qu'une courbe rectifiable admet une tangente en presque tout point.

Appendice 3.

Un ensemble parfait est un fermé sans point isolé. Un ensemble est totalement discontinu si la composante connexe de tout point est réduite à ce point. Un ensemble parfait totalement discontinu (non vide) sur la droite est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Il peut être construit par le même procédé, en mettant en place par étapes les composantes connexes du complémentaire (que l'on appelle intervalles contigus à l'ensemble).

Appendice 4.

Si, pour une valeur de α , on a $0 < H^{(\alpha)}(E) < \infty$, cette valeur est la dimension de Hausdorff de E . Il en est ainsi dans les exemples mentionnés. Le calcul est fait en [2] pour tous les ensembles parfaits homogènes sur la droite. Indiquons-le pour la courbe de von Koch construite sur $[0, 1]$.

Choisissons $\alpha = \frac{\log 4}{\log 3}$, et $\varepsilon = 3^{-n}$. On peut recouvrir Γ par 4^n disques de diamètres ε ; pour ce recouvrement, $\sum \varepsilon^\alpha = 4^n \varepsilon^\alpha = 1$. Donc $H^{(\alpha)}(E) \leq 1$.

La minoration de $H^{(\alpha)}(E)$ est moins évidente. Il est commode d'utiliser un théorème de Frostman : pour avoir $H^{(\alpha)}(E) > 0$ (E étant compact), il faut et suffit que E porte une mesure positive μ , de masse 1, telle que la masse portée par un disque quelconque de diamètre ε soit majorée par $c\varepsilon^\alpha$ (c ne dépendant que de E et de α). On prend ici la mesure définie par le paramètre t : ainsi la masse portée par un disque D est la mesure de l'ensemble des t (tels que $M(t) \in D$). Si $\varepsilon = 3^{-n}$, le disque D coupe au plus deux des arcs de la forme

$$\frac{j}{4^n} < t < \frac{j+1}{4^n} \quad (j = 0, 1, \dots, 4^n - 1),$$

donc la condition est bien satisfaite avec $\alpha = \frac{\log 4}{\log 3}$, et on a bien $H^{(\alpha)}(E) > 0$.

RÉFÉRENCES

- [1] KOCH (H. VOE). — Sur une Courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1904, 1, 681-704.
- [2] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). — *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Hermann 1963.
- [3] HAUSDORFF (F.). — Dimension und äussere Mass. *Math. Annalen*, 1918, 79, 157-179.
- [4] SCHREIBER (J.-P.). — Fonction de Peano et dimension de Hausdorff. *Enseignement mathématique*, 1967, 13, 325-328.
- [5] LÉVY (P.). — Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres. *Rendiconti di Matematica*, 1963, 22, 24-101.
- [6] KAUFMAN (R.). — Une propriété métrique du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1969, 268, 727-728.
- [7] KAHANE (J.-P.). — Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires. *Enseignement mathématique*, 1969, 15, 185-122.
- [8] MANDELBROT (B.). — How long is the coast of Britain?... *Science*, 1967, 156, 636-638.