

Programmation linéaire

L. GUERBER,

*Professeur à la Faculté de Droit et de
Sciences Économiques de Clermont*

1. Quelques problèmes de la vie économique.

1.1. Problème de diététique.

L'alimentation, pour être rationnelle, doit fournir à l'organisme un certain nombre de produits considérés comme essentiels, destinés à assurer l'entretien des tissus, à être brûlés dans l'organisme, à assurer le minimum d'apport de certains principes de manière à écarter les maladies par carence. C'est ainsi que l'on estime que la ration d'un homme normal doit comporter des protides, des glucides, des lipides, etc. de façon à lui fournir environ 2 500 calories par jour tout en lui apportant des doses, supérieures à certains seuils, de vitamines, par exemple : plus de 50 mg de vitamine C (dont la carence est liée à l'apparition du scorbut).

Par ailleurs, on connaît la teneur en protides, glucides, lipides, etc., des différents aliments; sur les Tables, on lit le nombre de calories apportées par les divers aliments : par exemple 150 g de radis en apportent 18, mais 150 g de boudin grillé en apportent 725. Enfin, on connaît la richesse en vitamines C par exemple, de la plupart des fruits acides tels que le citron.

Connaissant le coût de divers aliments, on peut se proposer de rechercher une alimentation de coût minimum qui apporte, à l'organisme, les qualités nutritives (*) indispensables en quantités suffisantes.

De telles recherches furent effectivement menées par George Stigler dès 1945 en opérant sur 77 aliments, 9 principes nutritifs et en utilisant les prix aux U.S.A. en 1939 puis ceux de 1944 : il observa une hausse d'environ 50 %. Actuellement, ce sont essentiellement dans le cadre de l'alimentation du bétail (par exemple des porcs du Minnesota) que de telles recherches sont effective-

(*) On les appelle aussi nutriments.

ment poursuivies, en fonction des prix journaliers des denrées. Certains économistes, également, se penchent sur de tels problèmes dans le cadre de l'aide aux pays sous-alimentés.

1.2. Problème d'investissement.

A chaque instant, l'E.D.F. doit être en mesure de fournir une quantité d'énergie supérieure à celle qui lui est demandée. On peut, pour simplifier, se limiter à 3 paramètres :

1° l'énergie annuelle consommée qui se mesure en GWh (1 GWh = 10^6 KWh) ;

2° la puissance de pointe exprimée en MW (1 MW = 10^3 KW) correspondant à la moyenne des heures de pointes des jours ouvrables ;

3° la puissance garantie correspondant aux moyennes horaires des jours ouvrables d'hiver, exprimée, elle aussi, en MW.

Pour satisfaire cette demande, l'E.D.F. dispose de divers modes de production avec les centrales « au fil de l'eau », les centrales thermiques, les centrales nucléaires, l'usine marémotrice de la Rance... etc. Connaissant les caractéristiques de ses diverses usines et leur coût de fonctionnement l'E.D.F. peut définir la production de coût minimum.

Par ailleurs, on connaît la progression de la demande d'énergie en fonction du temps, aussi l'E.D.F. doit-elle se définir un programme d'implantation de nouvelles usines. Elle est donc amenée à étudier les investissements de coût minimum (qui ne seront pas forcément des décisions conduisant ultérieurement à des coûts de production ou d'entretien minimum).

1.3. Problème de production.

Une même entreprise fabrique le plus souvent divers produits ; par exemple une menuiserie produit différents modèles de chaise ; une usine fabrique différents types d'engrais ; une raffinerie livre sur le marché de l'essence de qualités variées, du gas-oil, du fuel-oil et du gaz. Un problème qui se pose journalièrement est de définir le meilleur programme de fabrication de façon à satisfaire la demande extérieure et améliorer au maximum le bénéfice ou réduire au minimum les dépenses d'exploitation.

C'est un problème numérique de cette catégorie qui servira de support à l'étude que nous allons faire.

1.4. Problème d'affectation.

Toute entreprise de transport (par exemple la S.N.C.F., ou encore une société de location de voitures sans chauffeur telle Europcars, qui offre la location dans la ville choisie par le client d'une voiture de type choisi par le

client) se trouve journallement en face de problèmes du type suivant : disposant de véhicules donnés (wagons vides ou autos de marques données) en des points donnés, comment les acheminer au moindre coût, de façon à se trouver dans une seconde situation imposée.

Ce sont des considérations de ce genre que l'économiste anglais Ricardo (*) évoquait pour illustrer la nature du calcul économique en recherchant la meilleure affectation de divers ouvriers, inégalement habiles, à des tâches variées.

1.5. On pourrait penser que, dans ce problème d'affectation où il suffit de connaître les coûts des diverses affectations, l'emploi des machines à calculer permet de tout évaluer rapidement et, par suite, de connaître l'optimum. Or, si pour 3 ouvriers et 3 tâches, il n'y a que $3! = 6$ éventualités, il y en a déjà $10!$, soit plus de $3 \cdot 10^6$, pour 10 ouvriers et 10 tâches; pour 26 ouvriers et 26 tâches il y a $26!$ situations à envisager (une imprimante qui débite 1 500 lignes de 104 caractères par minute exigerait un emploi ininterrompu pendant plus de 10^{17} années pour simplement énumérer, par suite de 26 lettres, chacune de ces situations, alors que l'on attribue généralement à la terre une durée de vie probable de l'ordre de 10^{10} années!).

Cela montre, à l'évidence, combien un algorithme de calcul est nécessaire pour aborder des problèmes réels qui envisagent des centaines de postes différents. L'emploi simultané d'un algorithme et des ordinateurs augmente considérablement la puissance : c'est ainsi que le code « Marie Claire » écrit par D. Pigot pour FUNIVAC 1108 permet de traiter des problèmes faisant intervenir plusieurs milliers de relations.

2. Points communs aux problèmes qui précèdent : programmes linéaires.

2.1. Dans les problèmes que nous venons de citer, il s'agit toujours de déterminer des valeurs non-négatives d'inconnues, de façon à optimiser (c'est-à-dire à rendre extrême) une fonction linéaire de ces inconnues tout en satisfaisant à certaines inégalités linéaires traduisant des contraintes.

Par exemple dans le cas I d'une alimentation de coût minimum il faut trouver des quantités non-négatives des divers aliments à acheter; la fonction à optimiser est un coût qu'il s'agit de minimiser, et l'on fait implicitement l'hypothèse que le coût est une fonction linéaire des quantités (c'est une hypothèse essentielle, quoique, pas toujours très réaliste, car, d'une part, les prix unitaires diminuent souvent avec l'augmentation des quantités, d'autre part, si l'optimum correspond à un poids précis de fruits du type cerise ou orange il est plus facile de l'approcher en cerises qu'en oranges. On fait également

(*) RICARDO (David) auteur de Principes d'Économie politique (1772-1823).

l'hypothèse que les apports des principes essentiels ont lieu linéairement et que, par suite, pour reprendre les exemples numériques cités, λ grammes de radis et μ grammes de boudin apportent, à l'organisme, $\lambda \frac{18}{150} + \mu \frac{725}{150}$ calories.

Il convient également de noter que les valeurs utilisables des inconnues sont bien souvent entières : c'est ainsi que, pour un programme optimum de fabrication de divers modèles de chaises, on veut une réponse en nombres entiers, ce qui conduit au problème de la résolution en nombres entiers des problèmes précédents (c'était déjà le cas ci-dessus pour les oranges ou les cerises).

2.2. Ayant souligné certains traits essentiels communs aux problèmes précédents nous allons, en utilisant un problème numérique de production, donner quelques définitions permettant de s'exprimer dans l'étude de ces questions.

Soit un atelier fabriquant deux catégories de produits notés I et II. On se propose de déterminer un programme de fabrication rendant maximum le bénéfice global, sachant que le bénéfice est de 8 F sur un kg du produit I, et de 10 F sur un kg du produit II. Les contraintes de la fabrication imposent d'utiliser pour cette fabrication, trois machines M_1 , M_2 , M_3 , dans un ordre d'ailleurs arbitraire, suivant les temps indiqués ci-dessous en minute pour l'obtention d'un kg de produit I ou II (mais le passage d'un produit sur une machine est continu).

	M_1	M_2	M_3
I	9	6	5
II	8	10	15

Par ailleurs, les machines M_1 , M_2 , M_3 ne sont disponibles qu'un nombre limité d'heures au cours d'un mois; respectivement 120 h, 100 h, 125 h.

2.3. Pour une production x_1 , x_2 , mesurée en kg, des produits I et II, le bénéfice, exprimé en F, est :

$$\delta = 8x_1 + 10x_2.$$

Comme M_1 ne peut être utilisé que 120 h, soit 7 200 mn, il faut

$$9x_1 + 8x_2 \leq 7\,200.$$

On a, de même,

$$6x_1 + 10x_2 \leq 6\,000,$$

$$5x_1 + 15x_2 \leq 7\,500.$$

Bien entendu, comme on veut une production réelle : $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Le problème est donc de déterminer un couple (x_1, x_2) , de nombres non-négatifs, rendant maximum

$$\xi = 8x_1 + 10x_2$$

et vérifiant

$$9x_1 + 8x_2 \leq 7\,200$$

$$6x_1 + 10x_2 \leq 6\,000$$

$$5x_1 + 15x_2 \leq 7\,500$$

soit encore, en langage matriciel, de déterminer un vecteur-ligne $X = (x_1 \ x_2)$ de quantités à fabriquer $X \geq 0$,

rendant maximum XE où $E = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

et vérifiant $XA \leq B$ avec $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 8 & 10 & 15 \end{pmatrix}$,

$$B = (7\,200, 6\,000, 7\,500).$$

Les problèmes consistant à rechercher

$$X \geq 0$$

qui maximise

$$XE$$

sous les contraintes

$$XA \leq B$$

sont appelés *programmes linéaires canoniques*.

On appelle *programmes linéaires (*)*, les problèmes où l'on recherche

$$X \geq 0$$

qui maximise

$$XE$$

sous les contraintes

$$XA = B.$$

2.4. Il est clair que tout programme linéaire peut se formuler en terme de programme linéaire canonique puisque

$$XA = B \Leftrightarrow \begin{cases} XA > B \\ XA < B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(-A) < (-B) \\ XA < B \end{cases} \Leftrightarrow XA' < B'$$

Inversement, tout programme linéaire canonique peut se formuler en programme linéaire; il suffit d'introduire des inconnues (on dit aussi des variables) d'écarts pour transformer les inégalités en égalités. Par exemple on remplace

$$9x_1 + 8x_2 \leq 7\,200 \quad \text{par} \quad \begin{cases} 9x_1 + 8x_2 + x_3 = 7\,200 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(*) Certains auteurs disent programme linéaire standard.

ce qui conduit à introduire un nouveau vecteur

$$X' = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)$$

une nouvelle matrice

$$E' = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et une nouvelle matrice technique

$$A' = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 8 & 10 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le problème s'énonce alors :

On se propose de déterminer $X' \geq 0$ qui maximise $X'E'$, sous les contraintes

$$X'A' = B.$$

qui est du type programme linéaire.

2.5. Soit le programme linéaire canonique défini par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{déterminer} & X \geq 0 \\ \text{maximisant} & XE \\ \text{avec} & XA \leq B. \end{array} \right.$$

On appelle :

programme réalisable tout vecteur X vérifiant $\begin{cases} XA \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$
solution tout programme réalisable maximisant XE .

2.6. On vérifie immédiatement que :

α) L'ensemble des programmes réalisables est un polyèdre convexe (éventuellement \emptyset , si les conditions sont incompatibles). En effet si X_1 et X_2 sont deux programmes réalisables $\lambda X_1 + \mu X_2$ est aussi un programme réalisable $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall \mu \in \mathbb{R}^+$ avec $\lambda + \mu = 1$. Par ailleurs en vertu de la linéarité, les surfaces limites sont planes.

β) L'extrémum de XE ne peut être réalisé en un point strictement intérieur au polyèdre convexe des programmes réalisables. Si, en effet, un point X^0 où XE admet un extrémum était strictement intérieur le plan $XE = X^0E$ traverserait le polyèdre et d'un côté $XE < X^0E$ de l'autre $XE > X^0E$. Comme il y aurait des points du polyèdre de part et d'autre de ce plan, l'extrémum (que ce soit un maximum ou un minimum) ne pourrait être réalisé en X^0 . Le plan $XE = X^0E$ doit être tel que le polyèdre ne le traverse pas : ce peut être le plan d'une face ou un plan passant par une arête ou par un sommet pour employer le langage géométrique de \mathbb{R}^3 ; dans tous les cas, il contient un sommet (au moins).

3. Exemple de résolution d'un programme linéaire canonique.

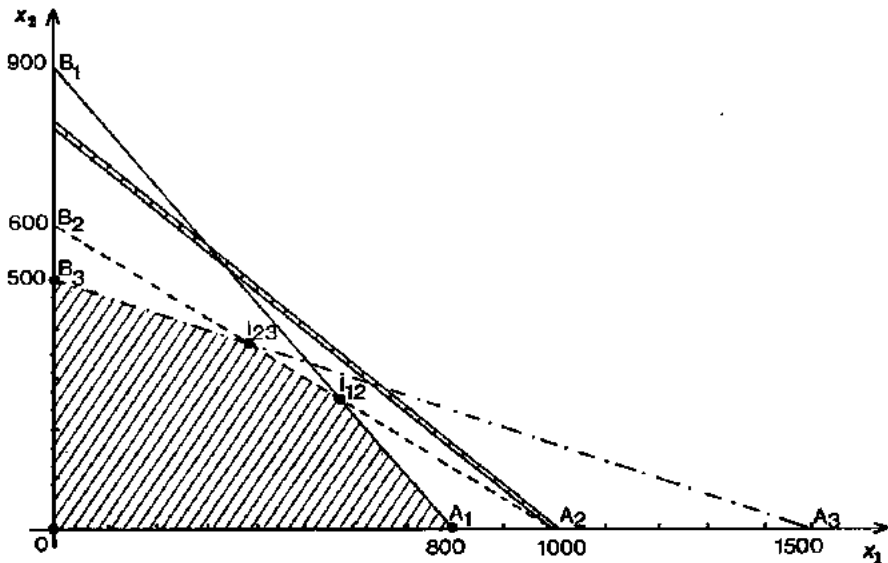
3.1. Reprenons donc le problème exposé au 2.2. et formulé, en programme linéaire canonique, au 2.3. :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & 9x_1 + 10x_2, \\ \text{avec} & \left\{ \begin{array}{l} 9x_1 + 8x_2 < 7\,200, & (1) \\ 6x_1 + 10x_2 < 6\,000, & (2) \\ 5x_1 + 15x_2 < 7\,500, & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \end{array}$$

3.2. Comme il n'y figure que deux inconnues x_1 , x_2 , la résolution est susceptible d'être effectuée très simplement en langage géométrique sur \mathbb{R}^2 .

Sur le graphique ci-dessous, on a indiqué les droites A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , associées aux inégalités (1), (2), (3) qui bordent le polygone convexe $OA_1I_{12}I_{23}B_3O$ des programmes réalisables. On a figuré également la droite associée à

$$8x_1 + 10x_2 = 8\,000$$



(droite particulièrement facile à construire) qui indique « dans quelle direction » chercher la solution. La droite la plus éloignée de O parallèle à cette droite et contenant encore un point, au moins, du polygone des programmes réalisables montre que le sommet à retenir est unique : c'est I_{12} .

Les coordonnées de I_{12} solution de

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 = 7\,200 \\ 6x_1 + 10x_2 = 6\,000 \end{cases}$$

fournissent :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4\,000}{7} \approx 571,4 \\ x_3 = \frac{1\,800}{7} \approx 257,1 \end{cases}$$

puis

$$\xi = 8 \frac{4\,000}{7} + 10 \frac{1\,800}{7} = \frac{50\,000}{7} \approx 7\,143.$$

3.3. Pour présenter, sur le même exemple numérique, la méthode générale de résolution, dite méthode du simplexe, commençons par former le programme linéaire associé au programme linéaire canonique, en introduisant trois variables (ou inconnues) d'écart, c'est-à-dire autant qu'il y a de contraintes s'exprimant par des inégalités.

On est ainsi conduit à rechercher un vecteur non-négatif $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tel que

$$\xi = 8x_1 + 10x_2 \text{ soit maximum,}$$

tandis que :

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 + x_3 = 7\,200, \\ 6x_1 + 10x_2 + x_4 = 6\,000, \\ 5x_1 + 15x_2 + x_5 = 7\,500. \end{cases}$$

Il apparaît immédiatement un programme réalisable $(0, 0, 7\,200, 6\,000, 7\,500)$. Partant de ce programme, on va en trouver un meilleur, en utilisant l'expression de ξ .

Le programme précédent peut être considéré comme obtenu en résolvant le système d'équations précédent en x_3, x_4, x_5 (variables principales) fonctions de x_1, x_2 (variables non principales)

$$\text{suivant } \begin{cases} x_3 = 7\,200 - 9x_1 - 8x_2 \\ x_4 = 6\,000 - 6x_1 - 10x_2 \\ x_5 = 7\,500 - 5x_1 - 15x_2 \end{cases}$$

puis en annulant les variables non principales x_1 et x_2 .

On dit alors qu'on a un programme principal et, s'il est réalisable, un programme principal réalisable.

Désormais, les changements de programme vont se choisir systématiquement de la façon suivante :

Puisqu'on sait exprimer les inconnues principales en fonction des non principales, on sait exprimer ξ en fonction des seules inconnues non principales. Ici c'est

$$\xi = 8x_1 + 10x_2.$$

Dans le programme principal réalisable précédent $x_1 = x_2 = 0$ donc $\xi = 0$. Si, donc, on passe à un autre programme principal réalisable dans lequel soit x_1 , soit x_2 , soit les deux ne sont pas nuls, on aura amélioré ξ et ce programme sera meilleur.

Proposons-nous, par exemple, d'augmenter autant que possible x_1 sans modifier x_2 .

$x_3 = 7\,200 - 9x_1 - 8x_2$ montre que, si x_1 croît, x_3 décroît et atteint 0 pour $x_1 = 800$.

De même $x_4 = 6\,000 - 6x_1 - 10x_2$ montre que, si x_1 croît, x_4 décroît et atteint 0 pour $x_1 = 1\,000$.

Enfin $x_5 = 7\,500 - 5x_1 - 15x_2$ montre que, si x_1 croît, x_5 décroît et atteint 0 pour $x_1 = 1\,500$.

Il faudra donc prendre $x_1 < 800$ afin que $x_3 > 0$, $x_4 > 0$, $x_5 > 0$.

La méthode consiste à introduire x_1 comme variable principale tout en sortant x_3 qu'on annulera (puisque quand x_1 croît x_3 est la première variable à s'annuler).

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}(7\,200 - x_3 - 8x_2), \\ x_4 = 6\,000 - 6\frac{1}{9}(7\,200 - x_3 - 8x_2) - 10x_2, \\ x_5 = 7\,500 - 5\frac{1}{9}(7\,200 - x_3 - 8x_2) - 15x_2; \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x_1 = 800 - \frac{1}{9}x_3 - \frac{8}{9}x_2, \\ x_4 = 1\,200 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{14}{3}x_2, \\ x_5 = 3\,500 + \frac{5}{9}x_3 - \frac{95}{9}x_2; \end{cases}$$

avec

$$\varepsilon = 6\,400 + \frac{26}{9}x_3 - \frac{8}{9}x_2.$$

On définit, ainsi, le nouveau programme principal réalisable :

$$(800 \quad 0 \quad 0 \quad 1\,200 \quad 3\,500)$$

conduisant à $\varepsilon = 6\,400$, donc meilleur que le précédent.

L'expression de ε montre qu'on peut l'augmenter en prenant pour x_2 une valeur non nulle, ce qui conduit à prendre x_2 comme variable principale et l'examen (comme précédemment) des équations conduit à sortir x_4 des variables principales. On arrive ainsi à

$$x_2 = \frac{3}{14} \left(1\,200 + \frac{2}{3}x_3 - x_4 \right)$$

soit

$$x_2 = \frac{1\,800}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{14}x_4;$$

puis

$$x_1 = \frac{4\,000}{7} - \frac{5}{21}x_2 + \frac{4}{21}x_4$$

$$x_3 = \frac{5\,500}{7} - \frac{20}{21}x_2 + \frac{95}{42}x_4$$

avec

$$\xi = \frac{50\,000}{7} - \frac{10}{21}x_2 - \frac{13}{21}x_4$$

Cela définit un nouveau programme principal réalisable :

$$\left(\frac{4\,000}{7} \quad \frac{1\,800}{7} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{5\,500}{7} \right)$$

conduisant à :

$$\xi = \frac{50\,000}{7}$$

qui est un maximum puisque correspondant à $x_2 = x_4 = 0$ et que leurs coefficients sont négatifs dans l'expression de ξ .

Nous venons d'établir que le problème admettait une solution

$$x_1 = \frac{4\,000}{7} \approx 571,4$$

$$x_3 = \frac{1\,800}{7} \approx 257,1$$

correspondant au bénéfice

$$\frac{50\,000}{7} \approx 7\,143.$$

On peut suivre les étapes du calcul précédent (dit par la *méthode du simplexe*) sur la figure de la page 347.

Les variables d'écart x_2 , x_4 , x_5 mesurent les distances du point (x_1, x_3) respectivement aux droites A_1B_1 , A_2B_2 et A_3B_3 .

Le premier programme envisagé (programme de départ) correspond au point 0. La première étape où x_1 varie seule, x_2 restant nulle, correspond au déplacement du point représentatif sur l'axe Ox_1 . Le programme obtenu en fin d'étape où $x_1 = 800$, $x_2 = 0$ correspond au point A_1 . Ainsi, la première étape a fait décrire OA_1 . La seconde étape fait parcourir A_1I_{12} pour aboutir à la solution correspondant au point I_{12} .

Ainsi la méthode du simplexe conduit à rechercher le (ou les) sommet(s) rendant ξ maximum en déplaçant le centre de calcul de ξ , directement, d'un sommet à un autre sommet extrémité avec le précédent d'une même arête.

A chaque étape on introduit une variable principale, et on en sort une, si bien qu'on ne peut opérer que sur deux variables variant en sens contraires.

L'opposé du coefficient de la variable entrante dans l'expression de la variable sortante se nomme le *pivot*; il est toujours strictement positif. Dans la première étape, le pivot est 9, dans la seconde c'est $\frac{14}{3}$.

4. Problème dual; problème primal.

4.1. Étant donné le programme linéaire canonique

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{déterminer} & X > 0 \\ \text{maximisant} & XE \\ \text{avec} & XA < B \end{array} \right.$$

on appelle problème dual

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer un vecteur-colonne } Y > 0 \\ \text{minimisant } BY \\ \text{avec } AY > E. \end{array} \right.$$

Notons que le programme linéaire canonique pouvait encore s'exprimer, en notant $'M$ la transposée de la matrice M , par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{déterminer } 'X > 0 \\ \text{maximisant } 'E'X \\ \text{avec } 'A'X < 'B \end{array} \right. \quad \text{soit encore} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{déterminer } 'X > 0 \\ \text{minimisant } ('E)'X \\ \text{avec } ('A)'X > ('B) \end{array} \right.$$

où $'X$ est un vecteur-colonne.

Ainsi, le problème dual apparaît comme étant du même type que le problème initial : c'est un programme linéaire canonique relatif maintenant à la matrice économique $-'B$, à la matrice technique $(- 'A)$ et à la matrice des contraintes $- 'E$. Il est clair que ce processus de passage au dual qui a (X, E, A, B) substituée $('X, - 'B, - 'A, - 'E)$ est involutif, et que le problème initial est le dual de son dual.

Le second problème est désigné sous le nom de *problème dual* du problème initial qu'on nomme *problème primal*.

4.2. Il est possible de donner une interprétation économique simple du problème dual du problème numérique 2.2.

Le vecteur-colonne recherché est un vecteur-prix Y dans l'espace dual de l'espace des quantités X (les prix définissant des formes linéaires sur l'espace des X). Il s'agit de trouver un prix réel (Y doit avoir des éléments non négatifs) de location par minute des 3 machines, qui conduise un étranger à l'usine à louer l'ensemble des 3 machines pendant tout leur temps disponible le moins cher possible, et qui soit acceptable par le propriétaire de l'usine.

Le coût de location le moins cher correspond à un minimum de

$$7\ 200 y_1 + 6\ 000 y_2 + 7\ 500 y_3$$

soit BY minimum. Ce prix de location

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

est acceptable par le propriétaire de l'usine s'il est tel que le bénéfice ainsi retiré est supérieur au bénéfice retiré de la marche des machines, ce qui s'exprime par

$$\begin{aligned} 9y_1 + 6y_2 + 5y_3 &> 8 \\ 8y_1 + 10y_2 + 15y_3 &> 10 \quad \text{soit} \quad AY > E. \end{aligned}$$

4.3. Relativement à deux problèmes en dualité, on dispose du théorème fondamental suivant :

Théorème I. — Si l'un des problèmes a un sens et une solution (au moins)

1° le problème dual a aussi un sens et une solution (au moins);

2° les extrémums atteints pour les solutions sont égaux.

Dire que le problème a un sens, c'est exprimer que le polyèdre convexe n'est pas vide c'est-à-dire que les contraintes ne sont pas contradictoires. Dire que le problème a une solution, c'est exprimer qu'il y a au moins un point extrême dans la direction associée à E (ou B) ce qui peut ne pas avoir lieu par exemple si le polyèdre est une surface prismatique et la direction envisagée celle des génératrices.

On établit également :

Théorème II. — Si dans l'un des problèmes des contraintes sont non saturées pour une solution, dans le problème dual les variables associées sont nulles pour l'extrémum.

4.4. A titre d'exercice, nous allons vérifier les résultats qui précèdent sur le problème dual du problème 2.2.

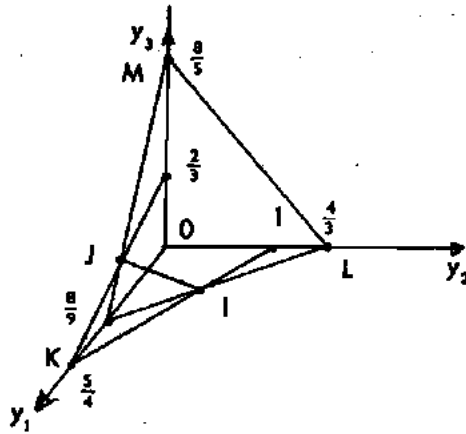
Le polyèdre convexe des programmes réalisables est défini par

$$\begin{aligned} y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0 \\ 9y_1 + 6y_2 + 5y_3 > 8 \\ 8y_1 + 10y_2 + 15y_3 > 10. \end{aligned}$$

C'est un polyèdre infini, situé dans le trièdre des coordonnées positives admettant aussi pour faces le triangle IJK et le quadrilatère $IJML$ (en appelant IJ les traces sur les faces $y_3 = 0$ et $y_1 = 0$ de l'arête intersection des deux contraintes de bénéfice).

On trouve que le minimum est obtenu en I donc pour

$$\left\{ \begin{array}{l} y_3 = 0 \\ 9y_1 + 6y_2 = 0 \\ 8y_1 + 10y_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{soit encore pour} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{10}{21} \\ y_2 = \frac{13}{21} \\ y_3 = 0 \end{array} \right.$$



et qu'il vaut :

$$7\,200 \frac{10}{21} + 6\,000 \frac{13}{21} + (7\,500 \times 0) = \frac{50\,000}{7}.$$

On observe donc bien que :

1° les extrémums pour la solution sont égaux (et valent $\frac{50\,000}{7}$).

2° à la contrainte imposée par M_1 qui n'est pas saturée (puisque pour la solution du problème primal $x_3 > 0$) il correspond une inconnue duale $y_3 = 0$.

5. Desserrement des contraintes. Bénéfice marginal.

● Examinons l'effet sur la fonction économique, d'une modification des contraintes, dans le problème numérique 2.2.

Supposons qu'au lieu d'être limité à 120 h soit 7 200 mn l'utilisation de la machine M_1 puisse se faire pendant $(7\,200 + \lambda)$ mn. Si λ est important, la forme du polygone convexe des programmes réalisables peut être modifiée de façon telle que l'optimum de ξ ne corresponde plus au sommet I_{12} mais à un autre sommet, faisant intervenir d'autres contraintes. Si λ est faible, c'est encore I_{12} qui définit l'optimum mais ce sommet se trouve alors défini par :

$$\begin{cases} 9x_1 + 8x_2 = 7\,200 + \lambda, \\ 6x_1 + 10x_2 = 6\,000; \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4\,000}{7} + \frac{5}{21} \lambda, \\ x_2 = \frac{1\,800}{7} - \frac{1}{7} \lambda. \end{cases}$$

Ainsi, une augmentation de λ mn pour la contrainte imposée à la machine M_1 améliore de $\frac{10}{21}\lambda$ francs le bénéfice optimum et, par suite, $\frac{10}{21}$ est le *bénéfice marginal, mesuré en francs, associé à la contrainte liée à M_1 , exprimée en mn.*

Un calcul analogue peut être conduit à partir d'un desserrement de la contrainte imposée à la machine M_2 et l'on trouve que, porter le seuil de 6 000 mn à $(6\ 000 + \mu)$ mn fait passer l'optimum de

$$\frac{50\ 000}{7} \text{ à } \frac{50\ 000}{7} + \frac{13}{21}\mu;$$

le bénéfice marginal associé est donc, dans ce cas, $\frac{13}{21}$.

Enfin, il est clair qu'une modification légère imposée au seuil de 7 500 mn imposé à la machine M_3 est sans effet sur le choix du sommet I_{13} donc sur l'optimum de ξ et le bénéfice marginal correspondant est nul.

● Reprenons la même étude sur le problème dual.

Le polyèdre convexe des programmes réalisables est indépendant des contraintes qui, cette fois, interviennent dans la fonction économique. Il en résulte que pour une faible variation de la contrainte imposée à la machine M_1 c'est toujours I qui fournit l'optimum et le bénéfice associé est :

$$(7\ 200 + \lambda) \frac{10}{21} + 6\ 000 \frac{13}{21} + 7\ 500 \times 0 = \frac{50\ 000}{7} + \frac{10}{21}\lambda.$$

Ainsi, les coordonnées du sommet retenu I fournissent directement les valeurs des bénéfices marginaux associés à chacune des contraintes; à la coordonnée $y_2(I) = 0$ correspond un bénéfice marginal nul et une contrainte non saturée.

Sur cet exemple l'intérêt de l'étude du dual apparaît nettement : on a, comme sur le primal, la valeur de l'optimum de la fonction économique et la liste des contraintes saturées pour cet optimum qui constituent ce qu'on nomme des goulets (ou encore des goulots) d'étranglement de la production, en prenant la liste des variables non nulles. L'étude du dual fournit, en outre, le coefficient de desserrement de chacune de ces contraintes, par la valeur de chacune des coordonnées non nulles du sommet fournissant l'optimum. Ajoutons que, s'il n'y a que deux contraintes, le problème dual est plan, quel que soit le nombre des inconnues du primal.

Bibliographie sommaire

I. — Articles de :

DUCETUX (P.). — Programmation linéaire. *Bulletin APM*, n° 263-264, p. 345.

GUILBAUD (G.-Th.).

— La mathématique des programmes économiques. *Brochure APM*, n° 4.

HUBMAN (A.).

— Les math. modernes dans l'enseignement du 2^e degré. *Bull. APM*, n° 232, p. 29.

II. — Études détaillées et références bibliographiques dans :

ACHER (J.). — *Algèbre moderne et programmation linéaire* (Dunod).

DANTEO (G. B.). — *Applications et prolongements de la prog. linéaire* (Dunod).

DORFMAN (R.), SAMUELSON (P. A.), SOLOW (R.M.).

— *Prog. linéaire et gestion économique* (Dunod).

MAUREN (H.). — *Programmation linéaire appliquée* (Technip éditeur).

SEMNARD (M.). — *Programmation linéaire* (Dunod).

VAIDA (S.). — *Théorie des jeux et programmation linéaire* (Dunod).

III. — Une bibliographie de tous les exemples d'application antérieurs à juin 1957 se trouve dans :

RILEY (V.) et GASS (S. T.).

— *Linear programming and associated techniques*. (John Hopkins Press, Baltimore (Maryland)).