

Chronique des Commissions

Commission pédagogique

A propos du programme de Quatrième (suite).

Depuis l'article du dernier numéro de l'A.P.M. (275-276), deux mois et demi se sont écoulés et les éléments nouveaux sont fort nombreux.

* *

D'une part, la Commission pédagogique de l'A.P.M. s'est mise au travail. Lors de ses premières réunions, elle a dégagé certains principes d'action qui ont été plus ou moins repris en compte par le Bureau et les professeurs membres de la commission Lichnérowicz (obtenir une certaine liberté d'action du côté de la géométrie).

A sa demande, le Bureau de l'A.P.M. a été reçu par M. Lichnérowicz le jeudi 15 octobre 1970 et lui a fait part de son inquiétude sur les derniers projets de la Commission ministérielle, d'une part quant aux contenus (présence d'une géométrie axiomatique ambitieuse), d'autre part quant à la forme (programme contraignant ne laissant aucune initiative aux professeurs).

A la suite de cette entrevue, une première amélioration était obtenue : la voie axiomatique indiquée par le programme n'était qu'une voie possible, les voies « non officielles » devant faire apparaître tous les résultats de la « voie officielle », soit en axiomes, soit en théorèmes. Ce projet n'en restait pas moins « austère et contraignant » aux yeux de la Régionale parisienne notamment.

Une amélioration plus substantielle fut obtenue à la suite de l'intervention à la commission Lichnérowicz de D.J.S. (Défense de la Jeunesse Scolaire). Celle-ci, après des contacts auprès de membres de l'A.P.M., décidait de reprendre à son compte la position des expérimentateurs de Quatrième (voir l'annexe 3 dans l'article des n°s 275-276) et présentait un projet défendu par M. Samuel. La commission Lichnérowicz se ralliait à ce projet et admettait le principe d'un programme avec des objectifs limités et d'annexe(s) indiquant des voies pour les atteindre.

L'ancien libellé du programme de géométrie devenait donc « une » annexe, mais il fallut attendre le Conseil Supérieur de l'Enseignement de décembre, où le projet fut adopté, pour obtenir que d'autres annexes soient mises « en concurrence » avec la première.

A cette fin, nous publions des documents des équipes de Lyon et Poitiers-Limoges pouvant servir de point de départ pour rédiger ces autres annexes.

* *

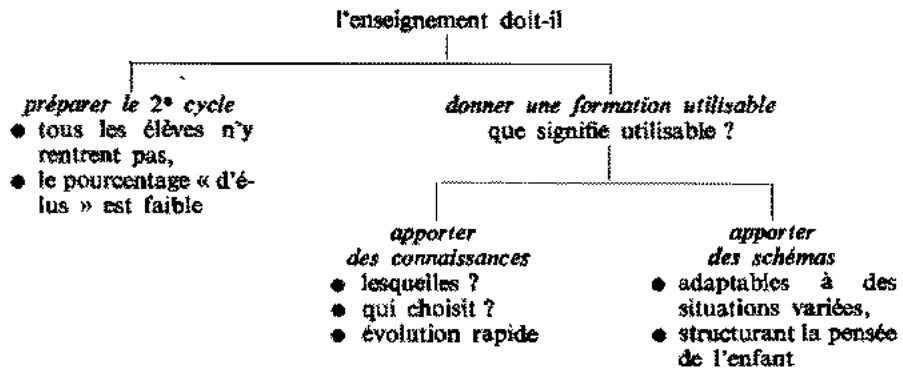
Au-delà de cet historique du programme de Quatrième, plusieurs remarques s'imposent :

1° Ce n'est qu'à la suite de l'intervention de D.J.S. cautionnée par des professeurs de l'enseignement supérieur (M. Samuel et M. Pisot) que des progrès appréciables ont été obtenus. On ne peut qu'épiloguer sur le poids des avis des professeurs de Quatrième eux-mêmes auprès de la commission Lichnérowitz et même d'autres professeurs...

2° Les annexes seront plus ou moins ouvertes selon ce que les professeurs, eux-mêmes, en feront. Il semble donc nécessaire que les Régionales se penchent sur ce programme de Quatrième et sa suite, celui de Troisième, et fassent des propositions. Certaines Régionales, ainsi Paris, ont déjà commencé leurs travaux. Un bulletin de synthèse pourrait être la conclusion de ces études.

3° A plus long terme (4 ans!), il semble indispensable de revoir les contenus des programmes de Quatrième et Troisième. Bien sûr, ces contenus ne peuvent être revus qu'en fonction des objectifs qu'on assigne à l'enseignement dans ces classes.

Pour l'instant, le moins qu'on puisse dire c'est que les avis divergent selon les individus! Les Régionales doivent donc essayer de préciser ces objectifs. Pour reprendre une lettre de Lassave (Toulouse) :



On voit qu'en fonction des réponses apportées aux différentes questions, le contenu des programmes de ces classes sera très différent.

4° Le nombre des lettres reçues d'un peu partout (et tout particulièrement du Nord) montrait l'ampleur du malaise ressenti par les collègues au début de cette année scolaire devant les projets de la commission Lichnérowitz. Un peu partout on s'indignait de voir complètement oublié l'intérêt même des enfants. Quoique tardive, et parce qu'elle a reçu des concours appréciables, l'action de l'A.P.M. n'a pas été inutile. Notre vigilance ne doit plus être prise en défaut; rendez-vous pour le programme de Troisième.

Le Secrétaire pédagogique, B. BELOUZE.

N.D.L.R. — Réunie le 1^{er} février, la Commission ministérielle a décidé, de façon presque unanime (à 9 sur 10), de soumettre au Conseil d'enseignement du 3 mars, un texte de programme, pour les Quatrième et Troisième, tenant compte de diverses suggestions évoquées ci-dessus. Ce large accord met fin, de façon heureuse, à une confusion artificiellement entretenue par certains. Les collègues enseignant en Quatrième et Troisième ne peuvent que se réjouir de ce dénouement.

Annexe 1 :

Proposition de programme faite par l'équipe lyonnaise

(fin octobre 1970).

Géométrie de 4^e.

N.B. — Nous avons inclus dans ce projet toutes les notions qui figurent dans le projet de la Commission dans sa rédaction du 29 juin 1970. Il est entendu que nous approuvons en principe les allègements éventuels opérés depuis lors.

1^o Exercices sur un réseau (oblique ou non) : cheminement le long des traits du réseau, codé par une suite d'instructions (chaque instruction comportant un entier et l'une des deux directions du réseau). Chemins ayant même nœud de départ et même nœud d'arrivée. Repérage d'un nœud par un couple d'entiers.

Translation sur un réseau, déterminée par un couple d'entiers. Translation transformant un nœud en un nœud donné. Couples de nœuds équipollents : « (A, B) est équipollent à (C, D) » signifie « la même translation transforme A en B et C en D ».

(Ce 1^o comporte des manipulations sans préoccupation de rigueur mathématique.)

2^o La feuille de papier, le tableau noir..., sont des morceaux de *plans matériels*. Un trait tracé à la règle est un morceau de *droite matérielle*. La pointe d'un crayon bien taillé laisse pour trace sur un plan matériel un *point matériel*.

Ce sont des représentations concrètes grossières du *plan*, de la *droite*, du *point* (voir plus loin).

Au cours de l'élaboration de \mathbb{R} , les élèves ont, par exemple, traduit sur une *droite matérielle* les encadrements successifs définissant un réel. Les élèves sont entraînés à utiliser la droite matérielle comme représentation graphique de \mathbb{R} et \mathbb{R} comme schéma mathématique de la droite matérielle.

De même, on les habituera à repérer des *points matériels* à l'aide de deux droites matérielles graduées, à utiliser des « translations matérielles », des couples de nœuds « équipollents », etc.

On mathématisera ensuite.

3^o Définitions (1).

① Un *plan réel repéré* est un couple (P, f) où P est un ensemble, dont les éléments sont appelés *points*, et f une bijection de P vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

② M étant un élément de P et (a, b) un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $f(M) = (a, b)$, a est appelé « première coordonnée » de M , b est appelé « seconde coordonnée » de M .

③ A tout couple de réels (x, y) , on associe une application de P vers P , dite « translation associée à (x, y) » (notée par exemple $t_{x,y}$) par laquelle le point M , tel que $f(M) = (a, b)$, a pour image le point M' , tel que $f(M') = (a+x, b+y)$.

(1) Voir plus loin « Commentaires ».

Théorèmes.

1. Les translations sont des bijections.

2. A tout couple de points (A, B) correspond une translation unique par laquelle A a pour image B, qu'on peut noter $t_{(A,B)}$.

3. L'ensemble des translations, muni de la loi « composition des bijections », est un groupe commutatif.

4° Couples de points équipollents : « (A, B) est équipollent à (C, D) » signifie « $t_{(A,B)} = t_{(C,D)}$ ».

Parallélogramme.

L'équipollence est une relation d'équivalence dans $P \times P$. Chaque classe d'équipollence est le graphe d'une translation et s'appelle *vecteur géométrique* (de la géométrie plane). Le vecteur classe d'équipollence du couple de points (A, B) se note \overrightarrow{AB} .

Le vecteur graphe de la translation composée de deux translations est le vecteur somme des vecteurs graphes de ces deux translations. On définit ainsi dans l'ensemble des vecteurs une loi dite *addition vectorielle* notée par exemple \oplus qui lui confère la structure de groupe commutatif.

Théorème de Chasles : $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; autres formes.

Produit d'un vecteur \vec{V} par un réel k : si \vec{V} est le graphe de la translation $t_{(a,b)}$, $k\vec{V}$ est le vecteur graphe de la translation $t_{(ka, kb)}$.

Deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' sont dits « linéairement dépendants » s'il existe deux réels α et α' non tous deux nuls, tels que $\alpha\vec{V} \oplus \alpha'\vec{V}'$ soit le vecteur nul.

Traductions diverses de cette situation.

5° Un couple de points distincts, (A, B), étant donné, étude de l'ensemble des points M défini par : « Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ ».

Propriétés.

— A et B appartiennent à cet ensemble. L'ensemble précédent est appelé droite AB.

— C et D étant deux points distincts quelconques de la droite AB, la droite CD est égale à la droite AB.

6° Graduation. Abscisse d'un point sur une droite.

Étant donné une droite AB, tout point M de la droite est tel qu'il existe un seul réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

L'application $g_{(A,B)} : M \rightarrow x$ de la droite vers \mathbb{R} est appelée « graduation » associée à (A, B) de la droite.

On dit aussi que x est l'abscisse du point M pour cette graduation $g_{A,B}$.

7° Droites parallèles : étant donné deux droites, droite EF et droite GH, ces droites sont dites parallèles si et seulement si \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{GH} sont linéairement dépendants.

— Théorème d'Euclide.

— Deux droites parallèles sont disjointes ou égales.

— Théorème : deux droites non parallèles ont un point commun et un seul.

(On vérifiera expérimentalement que les droites matérielles « traduisent » les propriétés des droites, que deux droites parallèles distinctes se représentent par deux droites matérielles qui ne se coupent pas, etc.)

Projection, de direction donnée, d'une droite D sur une droite D'.

Théorème de Thalès : A, B, C étant trois points quelconques de D, A', B' et C' leurs projetés respectifs et k un réel, si $\vec{AB} = k\vec{AC}$, alors $\vec{A'B'} = k\vec{A'C'}$.

Réciproque du théorème de Thalès : étant donné trois points A, B, C sur une droite D et trois points A', B', C' sur une droite D' tels que la droite AA' soit parallèle à la droite BB', si $AC = kAB$ et $A'C' = kA'B'$, alors la droite CC' est parallèle à la droite AA'.

8° Segment AB : ensemble des points M tels que : $\vec{AM} = x\vec{AB}$ et $0 \leq x \leq 1$.
Demi-droite.

9° Décomposition unique d'un vecteur selon deux directions sous forme d'une combinaison linéaire à coefficients réels. Repère du plan.

Barycentres dans le plan. Triangle ou repère du plan. Ensembles convexes, demi-plan, intersection d'ensembles convexes.

Représentation graphique des applications $x \rightarrow ax + b$ de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

10° Symétrie centrale. Image d'une droite.

11° On pourra faire le bilan des lois dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ utilisées et aboutir à l'espace vectoriel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ construit sur \mathbb{R} .

Commentaires sur 3°) et 4°).

Dans ces deux paragraphes, on a mis en évidence un espace vectoriel, l'espace vectoriel des translations, \mathfrak{G} , dont le groupe opère transitivement et fidèlement sur P. La donnée du couple (P, \mathfrak{G}) définit sur P une structure affine. Cette partie du programme est donc une approche analytique de la notion de plan affine.

Annexe 2 :

Une présentation possible de la géométrie en Classe de Quatrième.

Jacques CHAYÉ

Poitiers

Réunion des Expérimentateurs de Poitiers et Limoges en classe de quatrième.
Projet remis au Président de la Commission Ministérielle le 10 novembre 1970.

Acquisitions antérieures.

Indispensables	} 1 2 3
Souhaitables	

① *Opération. Loi de composition interne. Stabilité. Associativité. Commutativité. Élément neutre. Symétrique. Groupe. Sous-groupe.*

De nombreux exemples et contre-exemples sur des ensembles finis ou infinis peuvent, certains dès la classe de Cinquième, être proposés aux enfants :

- ceux qui leur sont déjà familiers dans \mathbb{N} , dans \mathbb{Z} ;
- exemples de lois de composition non associatives (soustraction, moyenne arithmétique, exponentiation, etc.);
- composition de bijections sur des ensembles finis (sous forme de jeux algébriques ou dans le langage des bijections : dans les deux cas, les élèves de Cinquième-Quatrième y sont remarquablement actifs!);
- lois \cap , \cup , Δ , dans $\mathcal{P}(E)$ fini ou non;
- lois sur un ensemble-produit;
- addition, multiplication dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (cf. plus loin).

Les notions peuvent être dégagées au fur et à mesure mais pas avant qu'elles ne soient motivées par exemples et contre-exemples.

② Structures à deux lois internes. Distributivité. Anneaux $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(D, +, \times)$. Corps $(\mathbb{R}, +, \times)$. Anneaux et corps $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$.

Les structures $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ sont très faciles à présenter sans le recours explicite aux congruences arithmétiques et aux opérations sur les classes; une horloge dont les heures sont numérotées de 0 à $p-1$ constitue une bonne motivation pour introduire dans l'ensemble $E = \{0, 1, \dots, p-1\}$ une loi $+$ en convenant que : quels que soient $x \in E$, $y \in E$, $x + y$ désigne le reste euclidien de $x + y$ par p , puis par analogie une loi \times telle que : quels que soient $x \in E$, $y \in E$, $x \times y$ désigne le reste euclidien de $x \times y$ par p .

Il importe peu à ce niveau que les structures d'anneau et de corps soient dégagées pour elles-mêmes; l'essentiel est que les élèves puissent calculer dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ ou dans $(\mathbb{R}, +, \times)$ en sachant ce qu'ils font, sans automatisme imbécile.

Loi externe. Module. Espace vectoriel.

Ici aussi, c'est par l'intermédiaire de nombreux exercices que ces notions pourront être rencontrées. Citons par exemple les trois situations isomorphes (pour une addition et une multiplication externe convenables) :

- translations sur un quadrillage infini codé par \mathbb{Z}^2 ou fini codé par $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$; le quadrillage n'est ici qu'un support concret, ce n'est pas un objet d'étude; au même titre que les blocs logiques ou les pions du jeu d'échec, il n'a pas à être défini mathématiquement; dans le cas fini, si on veut que les translations-applications soient suggérées par les translations physiques, il est recommandé de présenter le quadrillage sur une chambre à air dont on ne dessine plus ensuite que la « carte » plane;
- ensemble-produit \mathbb{Z}^2 ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$; pour cette situation plus abstraite, le quadrillage peut encore être utilisé, il figure alors l'espace lui-même;
- applications affines de \mathbb{Z} vers \mathbb{Z} ou de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; les élèves prennent beaucoup d'intérêt à la question s'il leur est demandé au préalable de construire les diagrammes sagittaux.

Dans les 3 cas, les domaines d'opérateurs étant \mathbb{Z} ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, la loi externe apparaît comme une loi interne « répétée » et ces premiers exemples sont ainsi très accessibles aux élèves de Quatrième.

Sachant que dans les écritures λ, x ,

- { x décrit un groupe
- { λ décrit un anneau unitaire ou un corps

on est amené à chercher si quelque chose de simple peut être dit sur :

$$\begin{array}{lll} \lambda.(x_1+x_2), & \lambda.0, & \lambda.(\text{opp. } x) \\ (\lambda_1+\lambda_2).x, & 0.x, & (\text{opp. } \lambda).x \\ (\lambda_1\lambda_2).x, & 1.x, & (\text{inv. } \lambda).x \end{array}$$

on peut alors remarquer, mais ce n'est pas indispensable, que les quatre résultats choisis traditionnellement pour leur commodité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda.(x_1+x_2) = \lambda.x_1 + \lambda.x_2 \\ (\lambda_1+\lambda_2).x = \lambda_1.x + \lambda_2.x \\ (\lambda_1\lambda_2).x = \lambda_1.(\lambda_2.x) \\ 1.x = x \end{array} \right.$$

permettent de retrouver les autres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda.0 = 0 \\ \lambda.(\text{opp. } x) = \text{opp. } (\lambda.x) \\ 0.x = 0 \\ (\text{opp. } \lambda).x = \text{opp. } (\bar{\lambda}.x) \\ \lambda.[(\text{inv. } \lambda).x] = x. \end{array} \right.$$

Les notions de \mathbb{Z} -module, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -module, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel, plus tard de \mathbb{R} -espace vectoriel, sont très accessibles au niveau de la classe de Quatrième; commencer par les cas les plus simples et non pas par l'espace vectoriel des « vecteurs » de la géométrie apparaît souhaitable.

Géométrie intuitive.

Les paragraphes 4 et 5 du programme de Cinquième permettent de développer l'imagination et d'enrichir l'expérience géométrique des enfants; on aurait tort de les priver des imageries traditionnelles sur lesquelles l'abstraction pourra s'appuyer dans l'avenir.

Initiation à l'axiomatique.

Il est indéniable que cette initiation est d'une grande importance, ne serait-ce que d'un point de vue culturel, mais présenter pour la première fois cette démarche à l'occasion de la géométrie apparaît illusoire. Nous constatons chaque année dans nos classes, à ce sujet, un véritable malentendu entre maître et élèves. En effet, la géométrie apparaît à ces derniers comme une science ayant pour but de *décrire* les propriétés des êtres (?) dont elle parle, quel que soit le zèle pédagogique déployé par le professeur pour leur apprendre à *déduire* à partir des règles du jeu et à l'aide de la logique (elle-même plus ou moins exploitée, mais c'est un autre problème). Ces propriétés — axiomes et théorèmes — sont pour eux des vérités absolues au même titre que la rotondité de la terre ou la date de la bataille de Marignan. Bien sûr, l'espace physique nous suggère certains axiomes et leur choix n'est pas arbitraire si nous voulons que le modèle mathématique colle au plus près la réalité, mais logiquement, seule la cohérence de la théorie représente une contrainte : nous restons donc toujours libres de fixer les règles du jeu pourvu qu'elles ne soient pas contradictoires.

Cette liberté est d'autant moins ressentie par les élèves que le référentiel semble imposé par la « nature » et demeure le même tout au long de l'année ou des années. Les points, les droites, les plans, sont apparemment inchangés, leurs représentations graphiques aussi, et pourtant la structure s'enrichit progressivement d'axiomes nouveaux dont certains sont formulés tardivement au moment où le besoin s'en fait sentir; l'introduction de ces énoncés non démontrés semble résulter d'une impuissance déductive ou d'une paresse intellectuelle et n'est pas perçue comme un nouveau départ permettant l'exploration d'une structure particulière.

Il est certain que dans tout enseignement élémentaire des mathématiques surgissent, quelquefois au sein même d'une phase déductive, des résultats que l'on est contraint d'admettre parce que leur démonstration exigerait soit une recherche très pénible, soit des outils mathématiques trop élaborés, mais cette fois aucune modification n'est apportée à la structure elle-même.

Pour éviter ce dialogue de sourds, il serait donc souhaitable de faire précéder l'étude de la géométrie d'une initiation à la démarche axiomatique sur des exemples simples où apparaîtrait mieux la dualité situation-modèle. Il est aisé d'exhiber des exemples de jeux algébriques (« petites machines », « monochodromes », « frises », etc.) dont la structure est décrite par quelques « axiomes » surabondants ou non; on pourra même, sur ces exemples, constater que plusieurs axiomatiques équivalentes peuvent être choisies pour mathématiser une situation et qu'inversement une même structure algébrique donne lieu à diverses interprétations.

Progression possible.

Une fois traité, le paragraphe 1 tel que le suggère le projet de programme, le paragraphe 2 pourrait être intégré au paragraphe 3 et l'introduction des translations dans le plan permettrait une présentation complète de toutes les notions contenues dans ces deux paragraphes.

Axiomes des translations,

Il existe un ensemble \mathcal{T} de bijections du plan P vers lui-même appelées translations et une multiplication externe sur P à opérateurs réels, vérifiant les axiomes T_1, T_2, T_3, T_4 .

(T_1) : $(\mathcal{T}, \circ, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

pratiquement $x \circ y$ sera noté $y+x$.

(T_2) : Quels que soient les points A et B , il existe une translation et une seule, telle que A ait pour image B , on la notera t_{AB} ou \vec{AB} .

On peut introduire les notions de bipoint, équipollence, vecteur, et ne pas identifier la translation t_{AB} avec son graphe, c'est-à-dire le vecteur noté \vec{AB} , mais ce n'est pas indispensable.

(T_3) : Pour que 3 points A, B, C , deux à deux distincts, soient alignés, il faut et il suffit qu'il existe un réel λ et un seul tel que : $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$.

Remarque : la condition d'unicité est surabondante.

(T₄) : Si $A \neq B$, $A' \neq B'$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors : $AB \parallel A'B'$.

— Conséquences.

- Formule de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
- l'application identique de P est une translation;
- l'opposé de \overrightarrow{AB} est \overrightarrow{BA} ;
- « croisement des équipollences » : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$;
- si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, alors $B = C$;
- si un point est invariant par une translation, cette translation est l'application identique;
- traduite d'une droite.

— Parallélogramme.

Définition : (A, B, C, D) est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (la notion de parallélogramme-quadruplet-de-points est très éloignée du sens habituel et peu « géométrique » : à 4 points peuvent correspondre 8 parallélogrammes distincts; au lieu de dire que (A, B, C, D) est un parallélogramme, on pourrait peut-être dire que (A, B, C, D) est en parallélogramme).

Théorème : soient A, B, C, D, 4 points distincts non alignés; pour que (A, B, C, D) soit en parallélogramme, il faut et il suffit que $AB \parallel CD$ et $AC \parallel BD$.

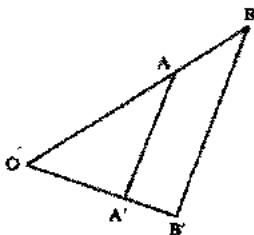
Exercices ; 1, 2, 3, 4 (cf. plus loin).

— Les théorèmes de Thalès.

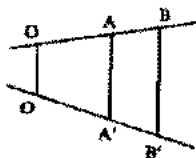
Théorème préliminaire : soient A, B, C, D, 4 points distincts; pour que $AB \parallel CD$, il faut et il suffit qu'il existe un réel λ et un seul tel que : $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$.

Théorème I (« réciproque ») du théorème de Thalès dans le triangle) : si $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OB'}$, alors $AB \parallel A'B'$.

Théorème II (théorème de Thalès dans le triangle) : si $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB}$ et $AB \parallel A'B'$, alors $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OB'}$.



Théorème III } généralisations.
Théorème IV }



Exercices ; 5, 6, 7.

Symétrie centrale :

- définition;
- symétrique d'une droite.

Exercices : 8, 9.

— *Milieu ou centre d'un bipoint (avant barycentre) :*

- existence et unicité d'un point G tel que : $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$;
- pour que (A, B, C, D) soit en parallélogramme, il faut et il suffit que (A, C) et (B, D) aient même milieu.

Exercices : 10, 11.

— *Centre de gravité d'un « triangle » :*

- existence et unicité d'un point G tel que : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$;
- G est situé sur chacune des médianes.

Exercice : 12.

— *Barycentre de 2 points, de 3 points.*

— *Bases-coordonnées.*

— *Demi-droite :*

- relation \mathcal{R} sur $D - \{0\}$: $\forall A, \forall B, (A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists \lambda > 0, \vec{OA} = \lambda \vec{OB})$;
- \mathcal{R} est d'équivalence;
- il existe deux classes d'équivalence;
- demi-droite ouverte]OM, demi-droite fermée [OM.

— *Segments :*

- segments]AB[, [AB], [AB[;
- théorème : pour que $M \in]AB[$, il faut et il suffit qu'il existe μ tel que $0 < \mu < 1$ et $\vec{AM} = \mu \vec{AB}$.

— *Ensemble convexe :*

- définition;
- premiers exemples.

— *Demi-plan :*

- relation \mathcal{R}' sur $P - D$:

$$\forall A, \forall B, A\mathcal{R}'B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ou :} \\ \text{ou : } O \text{ étant l'intersection de } AB \text{ et } D, \\ \exists \lambda > 0, OA = \lambda OB \end{array} \right. \begin{array}{l} A = B \\ AB // D \end{array}$$

- \mathcal{R}' est d'équivalence;
- il existe deux classes d'équivalence;
- demi-plan ouvert, demi-plan fermé;
- tout demi-plan est convexe.

Exercice : 13.

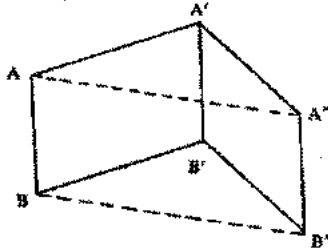
— Graduation d'une droite par \mathbb{R} . Abscisse d'un point. Mesure algébrique d'un bipoint.

Ces notions peuvent être introduites tout de suite après les axiomes des translations; elles sont utiles pour énoncer certains résultats comme les théorèmes de Thalès, mais elles ne sont pas indispensables.

Exercices.

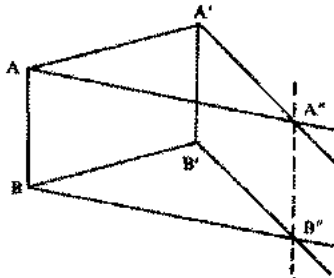
1. Construction de X tel que : $\vec{AB} = \vec{CX}$ (A, B, C alignés ou non).
2. Construction d'un représentant de $2t, 3t$, etc., connaissant un représentant de t .
3. On suppose que :

$$\begin{cases} AA' // BB' \\ A'A'' // B'B'' \\ AB // A'B' \end{cases}$$



montrer que si $A'B'' // AB$, alors $AA'' // BB''$.

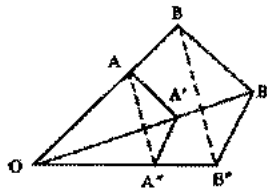
4. Montrer que, réciproquement, si $AA'' // BB''$, alors $A'B'' // AB$.



5. Construction d'un représentant de $\frac{1}{3} t, \frac{3}{5} t$, etc., connaissant un représentant de t .

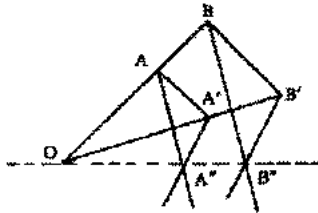
6. On suppose que :

$$\begin{cases} AA' // BB' \\ A'A'' // B'B'' \\ AB \text{ et } A'B' \text{ sécantes en } O \end{cases}$$



montrer que si $A'B''$ passe par O , alors $AA''//BB''$.

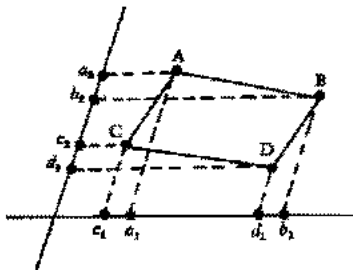
7. Montrer que, réciproquement, si $AA''//BB''$, alors $A'B''$ passe par O .



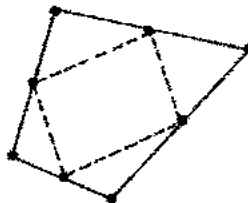
8. Composition d'une translation et d'une symétrie centrale, d'une symétrie centrale et d'une translation.

9. Composition de deux symétries centrales, de trois symétries centrales.

10. Condition nécessaire et suffisante pour que (A, B, C, D) soit en parallélogramme (en utilisant les projections sur deux droites sécantes).



11. Exercice classique sur les milieux des côtés d'un quadrilatère.



12. Équibarycentre de 4 points.

13. Secteurs angulaires. Bande de plan.