Les rapports des groupes de travail

1 - Utilisation d'émissions de télévision pour le recyclage

par Jeanne BOLON

Deux émissions ont été projetées :

– l'une de la série "Atelier de Pédagogie – Activités Mathématiques" destinée aux instituteurs : Quadrillages du C.E. au C.M. Cette émission regroupait différentes utilisations de quadrillages abondamment commentées (présentation de travaux d'élèves et animation).

– l'autre, de la série "Chantiers Mathématiques", destinée aux professeurs du 1er et 2ème cycles : Patchwork. Cette émission, sans commentaire, suggérait d'utiliser papiers peints, dallages, etc... pour étudier les groupes de transformation sous-jacents.

Ces deux émissions ne sont pas représentatives de la production de la RTS : elles correspondent à des extrêmes dont le groupe devait dire s'ils étaient dangereux ou non.

Les participants auraient souhaité voir le film plusieurs fois, compte-tenu de l'absence de documents d'accompagnement : de tels films leur sont apparus trop riches, dans le cas où les documents d'accompagnement ne parviennent pas aux utilisateurs. Dans le cas contraire, (trop peu fréquent de l'avis des participants), de tels films sont très utiles, car ils enrichissent l'imagination.

La discussion a tourné beaucoup plus sur l'organisation des diffusions de la Radio-Télévision Scolaire que sur le style même des émissions :

– les documents sont distribués de manière incohérente (dossiers bimensuels, brochures, revue "L'éducation").

– ils sont distribués au compte-goutte, les CRDP arrivant très rapidement à épuiser leur stock.

– le nombre d'émissions nouvelles est trop faible : une même émission peut passer deux années de suite, mais pas trois. Cette année, il n'y a eu que cinq émissions nouvelles diffusées dans la série "Atelier de Pédagogie", et une émission nouvelle dans la série "Chantiers Mathématiques".

Concernant les émissions "Atelier de Pédagogie", les tandems "émission tournée en classe - émission d'explicitation" sont appréciés. Les classes y ressemblent maintenant à de vraies classes ...

En conclusion, les participants sont conscients de l'intérêt de la diffusion à domicile d'informations qui aident les maîtres à rénover leur enseignement, mais souhaitent que la situation stagnante de 1970-1971 ne se reproduise plus.

2 - Langage et Symboles

par J.-M. CHEVALLIER

La discussion, assez libre, effleure plusieurs sujets; mais elle se centre sur la différence entre l'objet (mathématique) et sa représentation (métamathématique).

Exemple : "Soit x un réel" : l'élève a tendance à chercher la lettre x parmi les réels alors que cela signifie que "x" est le nom d'un réel.

Une autre confusion apparaît, suivant que x désigne un réel assigné (un élément "quelconque" de $\mathbf{R}$) ou une "variable" réelle (l'élément "générique" de $\mathbf{R}$ - ne pas confondre *quelconque* et *générique* !). Ainsi : si x est une variable libre, $3=x+1$ est un énoncé (ni vrai, ni faux); si x est assigné, $3=x+1$ est une proposition, vraie pour 2, fausse pour tout autre réel.

Cette confusion est particulièrement grave dans le cas où la lettre est *mutifiée*. Par exemple :

a|b signifie : $\exists\, x\,,\ b = ax$

b|c signifie : $\exists\, x\,,\ c = bx$

d'où l'élève croit pouvoir conclure $c = ax^2$! (Bien que les deux lignes précédentes soient correctes, il semble que devant des débutants, il vaudrait mieux remplacer x par y dans l'un des deux). Exemple de même type bien connu : $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, est-ce que $(\mu_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ a la même limite ?

Accessoirement le cas de l'écriture des ensembles "en compréhension" est évoqué : est-ce le premier ou le second compartiment qui est mutifiant ? Faut-il écrire $\{ y / \exists\, x \in E\,,\ P(x) \text{ et } y = f(x) \}$ ou bien $\{ f(x) ; x \in E / P(x) \}$? La seconde écriture, adoptée par le Dictionnaire et de même type que $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ semble préférable.

3 - Part de l'individu et part de la société dans l'acquisition d'un langage mathématique

(enfants de 5-6 ans à 12-13 ans)

par Renée CALVET, institutrice à Decazeville

On peut distinguer trois stades en mathématique :

- l'enfant expérimente sans verbaliser,
- il verbalise,
- il apprend un langage mathématique.

I *L'enfant expérimente sans verbaliser*

1er exemple

1ère étape : Un enfant de 4 ans, à bicyclette, s'amuse à foncer vers un mur. Il tourne toujours au dernier moment en s'approchant de plus en plus du mur.
2ème étape : Il fait varier l'angle d'arrivée.
3ème étape : Il échange son vélo contre un plus grand et de couleur différente.

2ème exemple

– Une enfant de 6 ans rejoint sa mère tous les jours à 12 heures 20, au même endroit à environ 500 m de l'école.

– Deux jours de suite, elle arrive en retard. Sa mère ne comprend pas la cause.

– Le 3ème jour, elle la voit arriver par une rue qui lui allonge le parcours. Elle lui fait remarquer qu'elle aurait pu se presser. "Maman, j'ai couru tout le temps" répond l'enfant.

De cet exemple, nous pouvons conclure que l'enfant a vu le rapport "vitesse-temps", mais elle a oublié celui "temps-distance".

II *L'enfant verbalise*

La communication est la motivation de la vie humaine.

Le langage parlé vient bien avant le langage écrit.

Il faut que l'enfant sente le besoin d'introduire un langage précis pour pouvoir communiquer ses expériences.

C'est le problème de la motivation.

III *Acquisition d'un langage mathématique*

Par tâtonnements, on arrive au langage mathématique que tout le monde doit comprendre.

Expérience réalisée par Madame René Calvet, institutrice à Decazeville

Les enfants d'une école (classe C.M.) communiquent avec ceux d'une autre école. Ils envoient le dessin d'une maison.

Leurs correspondants doivent par des retournements, des translations, etc... arriver à placer la maison dans la position qu'ils leur indiquent ; exemple : cheminée à droite et en haut.

Les explications sont données :
– soit par écrit,
– soit par bande magnétique.

Au départ, les élèves font des erreurs et n'arrivent pas à se faire comprendre. Ils comprennent la nécessité d'un langage mathématique précis.

Les enfants choisissent eux-mêmes leurs symboles. Si le symbole utilisé n'est pas compris par les correspondants (qui eux-mêmes, auront choisi un symbole différent pour désigner la même notion) ils demanderont *le* symbole qui leur permettra de communiquer.

Mais très souvent l'école ne permet pas de laisser l'enfant vivre l'expérience.

Problème des enfants étrangers dans les classes *

Ce problème risque de s'aggraver si on continue à mettre des grands enfants de 14 ans dans des cours élémentaires.

Deux solutions ont été proposées :

1) Les petits étrangers viennent au cours préparatoire pour la lecture et repartent ensuite dans leur classe.

2) Ils suivent leur classe normale et une heure par jour sont tous réunis pour des séances de rattrapage.

L'école nous permet de remettre en question le système social qui tend à créer des fossés entre les diverses classes.

Cependant elle favorise le mélange qui ne se fait pas dans la société.

4 - Les opérateurs à l'école élémentaire

par C. HAMEAU

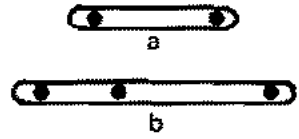
Les participants du groupe de travail ont souhaité préciser la notion d'*opérateur* à l'école primaire.

Les programmes du 2 Janvier 1970 ne font référence qu'à des opérateurs numériques. Cela n'exclut nullement les exercices portant sur les opérateurs non-numériques, ceux-ci constituant une excellente introduction et un utile prolongement pour l'étude des opérateurs numériques.

On a donc recherché quelques exemples d'opérateurs non-numériques susceptibles d'être étudiés avec des élèves de cours moyen. Les exemples suivants ont été proposés par les participants :

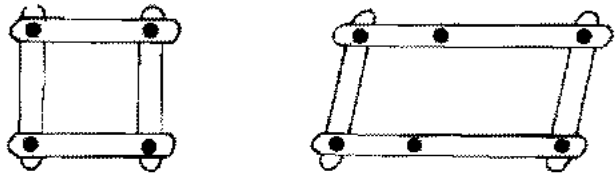
a) On dispose de deux séries de lattes :

Ces lattes peuvent être assemblées par un système de vis et d'écrous.



* Note de l'animateur : Le problème suivant a été soulevé par des participants, sans doute à partir du moment où il fut admis que le langage mathématique était un langage universel, à connotation très faible (donc très précis). Pourquoi, alors, ne pas utiliser *CE* langage, d'abord avec les petits étrangers qui arrivent âgés dans les classes ?

On assemble des tiges du modèle a et des tiges du modèle b de façon à obtenir un parallélogramme quelconque, un rectangle, un losange et un carré.



On envisage, pour les côtés, deux positions relatives des côtés (côtés perpendiculaires ou côtés non-perpendiculaires) et deux longueurs possibles (les côtés opposés ont même longueur ou bien ils n'ont pas même longueur).

On considère quatre consignes :

1°) Changer la position relative des côtés : s'ils sont perpendiculaires, on déforme la figure afin que les côtés ne soient plus perpendiculaires : s'ils ne sont pas perpendiculaires, on déforme la figure afin que les côtés soient perpendiculaires.

2°) Changer la longueur des côtés : si les côtés ont même longueur, on déforme la figure pour qu'ils n'aient plus même longueur ; s'ils n'ont pas même longueur, on déforme la figure pour qu'ils aient même longueur.

3°) On change à la fois la position relative des côtés et la longueur des côtés.

4°) On ne change rien.

On met ainsi en évidence quatre opérateurs qui opèrent sur l'ensemble des quatre figures géométriques que nous avons formées. On distingue nettement l'ensemble de départ et d'arrivée, d'une part, et l'ensemble des opérateurs d'autre part.

On peut composer ces opérateurs, c'est-à-dire considérer les éléments d'arrivée d'un opérateur comme éléments de départ pour un autre opérateur.

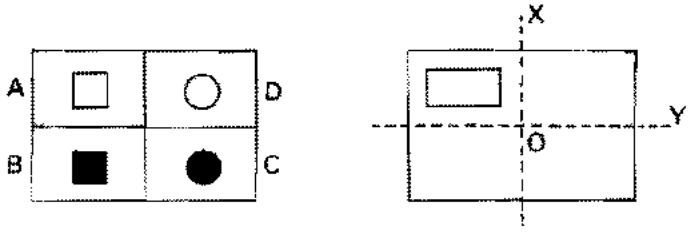
Deux opérateurs qui agissent de la même façon sur les mêmes éléments sont égaux. Ainsi, si nous désignons par (A) le premier opérateur, par (B) le deuxième, par (C) le troisième, on dira que (A).(C) = (B) parce que la chaîne d'opérateurs : (A) suivi de (C) opère de la même façon sur les mêmes éléments que l'opérateur (B).

On peut étudier les propriétés de cette loi de composition.

b) L'ensemble de départ est constitué par les positions prises par quatre élèves qui peuvent avoir les bras levés ou baissés, avoir le tronc droit ou penché.

On considère les consignes :
- changer la position des bras
- changer la position du tronc
- changer à la fois la position des bras et la position du tronc
- ne rien changer.

c) On découpe deux rectangles de carton. Sur le premier on dessine quatre figures A, B, C, D. Sur le second on découpe une fenêtre qui fait apparaître l'une des quatre figures.



Pour faire apparaître une autre figure, il faut changer la position du second carton. On peut faire une rotation autour de l'axe X ou autour de l'axe Y ou bien faire un demi-tour autour du point 0.

Ces consignes correspondent à quatre opérateurs.

Opérateurs numériques.

A l'école primaire ils sont un excellent exemple d'application.

Incidemment, ils donnent aux enfants l'occasion de faire de nombreux calculs.

On a noté l'importance de bien faire apparaître la valeur prédicatoire des signes utilisés dans les opérateurs numériques.

Les participants ont longuement discuté des difficultés rencontrées avec les opérateurs numériques, en particulier en ce qui concerne les opérateurs fractionnaires. La plupart des participants ont estimé que l'introduction des fractions à partir des opérateurs fractionnaires soulevait de nombreuses difficultés et qu'il serait préférable de repousser l'introduction des fractions à un stade ultérieur de la scolarité.

5 - Exploitation d'une situation vécue à l'école maternelle

par Mademoiselle MAKEDONSKY

Age des enfants : 5 ans - Effectif de la classe : 38 enfants

Point de départ choisi : *Une situation simple, vécue par les enfants avec assez d'intensité pour qu'elle leur pose réellement des problèmes :*

Tous les lundis, nous recevons dans le préau de l'Ecole Maternelle les 25 enfants d'un cours préparatoire pour des essais communs d'expression par la danse. Les enfants des 2 classes réunies tiennent à évoluer en même temps. Un désordre évident, ressenti comme gênant par les petits, s'ensuit.

Reprise de la question en classe : Comment arriver à danser tous ensemble, de façon à ce que chacun puisse le faire sans gêner personne et sans être dérangé par d'autres ?

1ères réponses enfantines : "On va dire d'avance où on sera dans le préau". "On va choisir les places de danse"...

Des essais dans le préau, suivant les explications données, laissent les enfants insatisfaits : celui qui parle s'aperçoit qu'il n'arrive pas complètement à faire comprendre aux autres ce qu'il veut.

D'où un nouveau projet de la classe : "On va montrer la danse". "On va dessiner pour montrer".

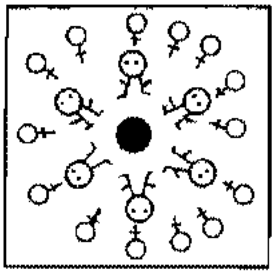
Examen par les enfants des dessins réalisés à partir de ce projet :

– *Ils remarquent d'abord que leurs dessins "parlent" et qu'on peut les "lire".* Ils insistent sur ce fait, qui est pour eux une découverte.

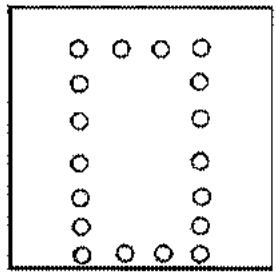
– *Ils réagissent très vivement au dessin de Christian, dans lequel les 1ers danseurs sont représentés ainsi :* ♀, *alors que les derniers arrivés le sont comme ceci :* ♀

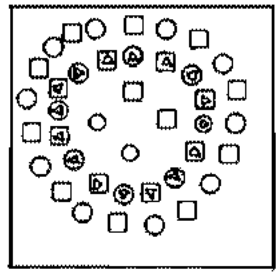
Discussion de la classe à partir de ce dessin : deux opinions très tranchées :

1)"Il a pas le droit de faire ça." 2)"Ca va parce qu'on comprend aussi bien qu'avec un dessin d'enfant tout entier". Les tenants de la 1ère opinion pensent que Christian a tort parce qu'il pourrait réussir un dessin plus complet de l'enfant et qu'il ne veut pas le faire. Les autres (la moitié de la classe à peu près) cherchent aussitôt à utiliser la possibilité nouvelle que le dessin de Christian leur a fait entrevoir : *"On pourrait prendre autre chose pour dire : un enfant"... "On mettrait un petit point ou un petit rond ou ce qu'on voudrait"...*



le dessin de Christian





dessins de deux autres enfants utilisant la possibilité découverte par Christian

Fin de la "dispute" : Qui a raison ? A-t-on "le droit" de représenter les danseurs ainsi ? ooo ♀ ♀ o
ou doit-on nécessairement les dessiner en entier avec le plus de détails possible : vêtements, cheveux, etc...? Un essai dans le préau convainct réellement : Certains dessins voulus représentatifs ne sont pas clairs, peuvent être interprétés de différentes manières et ne facilitent pas la réalisation de l'action souhaitée. Par contre, des dessins comme celui de Marie-Laure par exemple, permettent de savoir aussitôt comment se placer. C'est seulement à ce moment que la possibilité d'utiliser un signe convenu (♀ ooo) à la place d'une image plus proche de la réalité à évoquer est vraiment admise par la classe.

Communication avec un groupe ne connaissant pas les conventions adoptées dans la classe. A la grande surprise de mes enfants, les élèves du C.P. ne peuvent

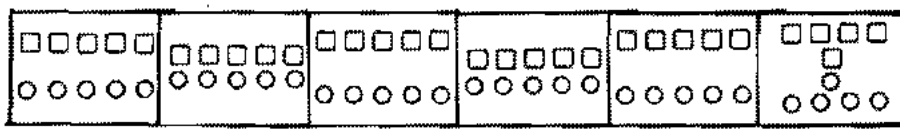
"lire" le dessin de Sophie qu'une fois qu'on leur a dit que : □ représente un petit garçon de leur classe, ○ une petite fille de leur classe, ◯ une fille de ma classe, ▣ un garçon de ma classe.

Aboutissement du travail : l'utilisation dans le préau, avec les 2 classes, d'un certain nombre de dessins pour l'organisation des évolutions donne aux enfants l'impression que leurs essais successifs les ont vraiment conduits à quelque chose, les ont aidés à parvenir au but souhaité : Danser, tous ensemble, d'une manière qu'ils puissent trouver satisfaisante.

Nouvelle question posée aux enfants : pour les aider à sortir de la situation vécue qui les a occupés longtemps et leur montrer que ce qu'ils ont fait pourrait leur servir en d'autres occasions (voisines en fait, mais que des petits peuvent ressentir comme différentes) :

Ce que nous avons fait pour la danse organisée avec les enfants du C.P. peut-il être fait pour d'autres danses ou pour celle-là seulement ? Est-il possible de représenter par le dessin n'importe laquelle des danses que nous connaissons ?

Résultat : Les enfants pour la plupart, sont très à l'aise, arrivent à des représentations très "lisibles" :



Représentation, par une petite fille, de la danse : "Pour passer le Rhône, il faut savoir danser..." (2 lignes d'enfants, tantôt écartées, tantôt plus rapprochées. A la fin, 2 enfants passent au milieu).

Passage à un autre moyen de représentation :
Un enfant, Franck, n'a jamais utilisé le dessin depuis qu'il a compris le sens des essais de Christian : Il se sert, depuis, de bouchons de matière plastique de couleurs différentes.

Remarques des enfants, invités à le regarder travailler et à donner leur avis :

— Franck, avec des bouchons de 4 couleurs différentes, arrive à dire la même chose que Sophie avec les 4 "dessins" qu'elle a choisis (○, □, ◯, ▣).

— Pour comprendre, il faut savoir ce que représente chaque couleur de bouchon.

— Les avantages et inconvénients possibles de ces deux moyens (dessin ou utilisation d'objets déplaçables) sont mis en discussion.

— "Il pourrait dire autre chose avec ses bouchons, si il voulait, Franck. Aujourd'hui, un bouchon bleu, c'est un enfant, parce qu'on a dit : ça serait un enfant. Mais un autre jour, on pourrait dire : ça serait un écureuil, si on voulait faire du calcul d'écureuil, ou ça serait un arbre ou tout ce qu'on veut si on a dit ce que c'est pour ce jour-là".

"C'est toujours le même bouchon, mais il dit pas toujours la même chose. Il dit ce qu'on veut ce jour-là".

Une supposition enfantine : "Si on prenait autre chose que des dessins ou des bouchons ? " conduit la classe à se constituer un matériel varié :

Propositions faites par les enfants : utiliser des graines, du carton découpé, des cailloux, des pierres et des briques, des petits bâtons et des allumettes; de la laine coupée collée sur du carton, pour faire du long et du rond, on ferait des pompons et des longs morceaux ; des crayons coupés en morceaux : des grands morceaux et des petits morceaux et des moyens morceaux, pour dire trois choses ; des nouilles ; des boutons de couleur...

Précisions données : "la pâte à modeler ne va pas, parce qu'on peut faire deux morceaux avec un".

"On ne peut pas prendre des haricots verts parce qu'ils vont pourrir et qu'il faut une chose qui reste".

"les crapauds et les grenouilles, ça ne va pas, même si c'est des fausses grenouilles ou des faux crapauds en dessin, parce qu'avec ça, on ferait que du calcul de grenouilles et de crapauds. Il faut une chose comme un bouchon, qui parle de ce qu'on veut ce jour-là."

A partir de remarques de ce genre, les enfants arrivent à définir les caractéristiques du matériel qu'ils désirent réunir : – objets "assez petits", – se conservant tels qu'ils sont (à l'inverse de la pâte à modeler, prise pour exemple de ce qui ne pourrait convenir). – Objets de forme simple (boutons, cailloux...) pouvant servir à évoquer des situations très différentes. – Objets pouvant se distinguer nettement les uns des autres par la grandeur, la forme ou la couleur ("pour dire plusieurs choses").

S'ensuivent : – *Des apports en classe d'objets variés (en grande quantité) – des tris, des essais de rangement – des inventions de jeux*, à partir du matériel ainsi réuni.

Situation nouvelle appelant à un nouvel effort d'organisation : Quelques meubles neufs sont livrés à l'école. Je les laisse au milieu de la classe et fais vivre aux enfants, une fois de plus, très complètement, l'expérience d'un désordre gênant l'action pour que tous sentent bien la nécessité d'établir un ordre.

Réactions des enfants : – Ils font d'eux-mêmes et aussitôt le rapprochement avec les situations de danse dans le préau ("ça sera pareil", "c'est pas plus difficile").

– Ils pensent à l'utilité de représentations préalables (dessin, etc...) – Ils pensent que des moyens différents (écriture, dessin, utilisation d'objets divers pris dans le matériel qu'ils ont réuni...) pourront être utilisés pour faire comprendre aux autres ce qu'ils proposent : ce qu'ils ont acquis lentement au moment du travail concernant l'organisation de la danse leur paraît maintenant évident.

Disposition adoptée (après discussions) : tables placées 2 par 2 (chacun choisissant son vis-à-vis).

Remarques faites par les enfants à ce moment du travail :

– Jeux de suppositions : "Si Jean-Philippe voulait être avec Flora et si Flora ne voulait pas être avec Jean-Philippe, si Flora voulait être avec un autre et si celui-là ne voulait pas être avec Flora, alors..."

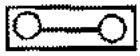
– "Il pourrait manquer une table pour mettre tout par 2, mais pas plus. Après, on aurait 2 comme il faut. Après, ça ferait 2 et 1, ça n'irait pas. 2 et 2, ça irait. 2 et 2 et 1, ça fait comme 1, ça va pas". (Jacqueline : 5 ans 1/2).

– "On peut pas faire un ordre sans un désordre. C'est un désordre qu'on peut pas empêcher, chaque fois qu'on change un ordre (Jean-Philippe : 5 ans 1/2).

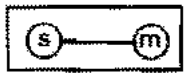
Travail de la classe, à partir du choix de deux enfants, exprimé ainsi : "Marie-Laure veut être avec Sylvie. Sylvie veut être avec Marie-Laure."

Représentations successives :

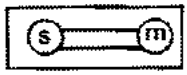
– (les 2 petites filles)



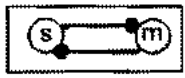
– les 2 petites filles seront ensemble



initiales ajoutées par un enfant pour que l'on sache de quelles petites filles il s'agit.



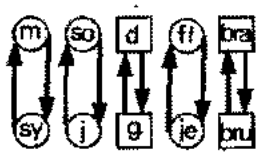
2 traits pour indiquer que le choix est réciproque : "On voit dans quel sens marche le trait quand on le dessine sur le tableau."



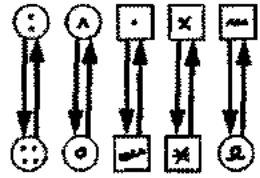
Après une critique (que je provoque) de l'essai précédent, les petits choisissent de placer une "boule" pour indiquer le sens des traits de relation.

Remplacement (après explication donnée aux enfants) de la convention qu'ils ont trouvée : ⟶ par la flèche.

Quelques réalisations des enfants à la suite de ce travail :



à l'initiale, les enfants pensent à rajouter la 2ème et même la 3ème lettre du nom, quand il pourrait y avoir confusion (Brahim et Bruno, par exemple).



Brahim, qui ne sait pas bien écrire et ne tient pas à le faire, arrive cependant à bien montrer sur son plan qu'il s'agit d'enfants différents.

D'autres réalisations (faites individuellement, par groupes ou avec la participation de tous) conduisent à de nouvelles discussions.
La réinstallation de la classe se fait avec l'aide de tous, suivant les plans jugés les meilleurs par les enfants.

Nouveau projet, à partir de suppositions des petits : "Si on avait voulu, on aurait pu ranger la classe autrement". Des plans d'installations possibles sont alors faits.

Travail d'un enfant sur ce thème (enfant jugé, d'après les tests, comme "retardé", mais qui prouve que, lorsqu'un problème l'intéresse vraiment, il est capable d'un travail très construit) :

– Alain découpe des rectangles de carton (représentant les tables) en grande quantité.

– Il les place selon la disposition actuelle de la classe et obtient ainsi, sans avoir à compter, un nombre de morceaux de carton correspondant au nombre réel de tables. Il jette les cartons en trop.

– Il constitue, avec les cartons conservés, qu'il change de place, un nouveau plan très différent.

– Il arrive à dessiner un plan correspondant exactement à ce qu'il a fait avec ses morceaux de carton (par tâtonnements successifs : dessin d'une sorte de grille de rangement, déplacement des cartons posés sur cette grille, coloriage des emplacements choisis, vérifications diverses...).

A partir de ce travail que j'ai raconté à Toulouse, les discussions (rapides par manque de temps) du groupe ont porté sur :

1) le type de situations à choisir pour les exploiter à l'Ecole Maternelle.

2) le cas des enfants qui, comme le petit Alain, (dont j'ai parlé à la fin de ce travail) risquent de ne pouvoir s'adapter à certaines formes de la vie scolaire alors qu'ils sont capables d'initiatives intelligentes, de raisonnements construits et efficaces s'ils vivent très complètement une situation comme un problème qui les concerne et dont la solution leur importe.

6 - L'école expérimentale de Francheville-le-Haut (Rhône)

par André FABRE, directeur de l'Ecole de Francheville-le-Haut

En Septembre 1967, a débuté aux écoles primaires de garçons et de filles de Francheville-le-Haut, une recherche pédagogique remplaçant complètement l'enseignement traditionnel du calcul par celui de la Mathématique. Aussitôt toutes les classes ont été géminées du C.P. au C.M.2, notes et classements supprimés.

L'école maternelle voisine s'est jointe à l'expérience. Tous les maîtres étaient d'accord. La plupart d'entre eux étaient à Francheville depuis longtemps. Tous les maîtres qui étaient à Francheville en 1967 sont toujours en place en 1971, et leur équipe s'est étoffée car des créations de classes nouvelles sont devenues nécessaires. Ils ne regrettent pas "l'acte de foi" qui leur était demandé au départ car depuis, ils constatent chaque jour les bénéfices qu'apporte aux enfants cet enseignement rénové.

Seul le cadre expérimental permettait de renouveler le contenu du programme et les méthodes d'enseignement. Aussi les démarches furent-elles entreprises pour obtenir le statut d'école expérimentale.

Un arrêté ministériel du 25 Octobre 1967 attribua la qualité d'établissement expérimental aux écoles de Francheville-le-Haut.

Certes le paragraphe final de la lettre officielle précisait "La présente désignation n'entraîne pas pour autant l'ouverture de crédits supplémentaires. Par contre elle implique pour les chefs d'établissements intéressés, l'obligation de fournir à la fin de chaque année scolaire un rapport détaillé sur les résultats des expériences entreprises."

Heureusement, il en fallait davantage pour éteindre l'enthousiasme de l'équipe.

L'expérience est conduite en équipe sous la responsabilité du directeur de l'I.R.E.M. de Lyon et des deux I.D.E.N. de la circonscription. L'équipe de Francheville-le-Haut comprend des enseignants de divers niveaux :

deux membres de l'Enseignement Supérieur

les deux I.D.E.N.
quatre professeurs de lycée
les quatorze instituteurs
une psychologue scolaire
Très souvent elle est renforcée par deux professeurs d'Ecole Normale.

L'équipe se réunit chaque Mercredi de 17 heures à 19 heures 30 pour analyser les résultats de la semaine écoulée, préparer les activités de la semaine suivante et compléter la formation des maîtres.

L'école de Francheville-le-Haut était une école primaire parmi tant d'autres. Elle l'est restée car il n'y a eu sélection ni pour les maîtres ni pour les élèves. Elle est toujours l'école communale qui reçoit tous les enfants du village. Actuellement, deux instituteurs sont demi-détachés à l'I.R.E.M. de Lyon et participent à la formation des formateurs qui seront chargés du recyclage des instituteurs de l'Académie de Lyon.

Conditions de l'expérience

Les maîtres travaillent en équipe où l'on collabore étroitement. De même les élèves sont organisés en groupes de travail dès le Cours Préparatoire. Cette organisation du travail de groupe présenta au début de l'expérience de très grosses difficultés tant pour les élèves que pour les maîtres, mais pour les uns comme pour les autres, cette méthode de travail se révéla très fructueuse et formatrice. Précisons que des contrôles individuels sont effectués de temps en temps au C.M.1 et au C.M.2, mais qu'au C.P. et aux C.E. le travail est presque exclusivement collectif.

Une difficulté provint du fait que les locaux et le mobilier scolaires, s'ils conviennent à un enseignement individuel, ne sont pas du tout adaptés aux activités de groupes. En rapprochant des tables, en se servant de grands panneaux ardoisés, les maîtres parvinrent toutefois à organiser à peu près correctement leur classe en équipe.

L'expérience commença sur 3 niveaux : C.P., C.E.1 et C.E.2. Et en 1970 se posa le problème de l'entrée en 6ème. Qu'allaient devenir les élèves de C.M.2 qui avaient bénéficié d'un enseignement rénové ?

L'école a pu obtenir une classe de 6ème spéciale dans un lycée proche. La continuité de l'expérience était donc assurée d'autant plus que le professeur de mathématique de cette 6ème était l'un des membres de l'équipe qui connaissait bien ses élèves car il les avait vu travailler bien souvent au cours de l'année scolaire.

La matière enseignée

L'essentiel des programmes appliqués dans les classes se trouve dans les fascicules Math-Equipe signés du sigle E. GARRON. Actuellement 4 sont édités pour Ecole Maternelle et C.P. ; 2 sont parus pour le C.E., les 2 autres pour le C.E. sortiront en Juillet et Septembre 1971. L'an prochain paraîtront les fascicules pour le Cours Moyen.

Le contenu de l'enseignement donné à Francheville est très loin du programme officiel. Notons par exemple :

au C.P. : jeux logiques — cartes perforées — connecteurs — découverte de l'espace — topologie.

en numération : groupements en bases 3, 4, 5, 6 - codages de nombres dans ces bases - pas d'étude de la base 10.

au C.E. : diagrammes divers – groupe de Klein – approche de la structure de groupe – symétries et translations – congruences – activités numériques en bases diverses dont le 10 – opérateurs non-numériques.

au C.M. : approche des théorèmes de Morgan – structure de groupe – notion de mesure – congruences – combinatoire – probabilités et statistiques – activités pré-algébriques – organisation de l'information.

Le matériel utilisé – Blocs logiques (Dienès) - Multibases Dienès - Réglettes Dick - Matcub Asco...etc. Mais une grande partie du matériel est fabriqué par les maîtres eux-mêmes.

Réaction des instituteurs : Généralement les instituteurs qui voient travailler les élèves de Francheville-le-Haut sont à la fois conquis et déroutés.

Conquis car ils se rendent compte de la motivation puissante des exercices proposés aux enfants et de l'intérêt suscité par les séances de mathématique.

Déroutés par la matière enseignée et l'organisation nouvelle de la classe. Ils souhaitent unanimement recevoir une information mathématique qui permettrait de généraliser dans les classes élémentaires les résultats d'expériences pédagogiques semblables à celle de Francheville.

Réaction des parents

De nombreuses réunions de parents ont eu lieu sur le thème : la mathématique à l'école primaire. Nous en provoquons plusieurs chaque année.

La crainte essentielle des parents était au début de l'expérience de Francheville : "Mon enfant ne saura plus compter". Cette inquiétude a disparu à peu près totalement car les parents ont constaté que leur enfant commençait plus tard mais qu'au C.M., il comptait mieux et plus intelligemment.

Les familles ont dû admettre aussi de ne pas toujours comprendre ce que faisaient leurs enfants à l'école. On a noté aussi un notable recyclage mathématique des parents grâce à des conversations avec leurs enfants ou des jeux mathématiques rapportés de l'école. Un Cercle de Mathématique Moderne a fonctionné pendant deux ans à Francheville.

Un sondage opéré en 1968 donnait :
- 2,6 % opinion défavorable
- 52,6 % opinion favorable
- 32,1 % opinion très favorable
- 12,7 % sans opinion

Nous pensons qu'actuellement un sondage d'opinion donnerait des résultats encore meilleurs.

Comportement des élèves

Les instituteurs et tous les membres de l'équipe ont constaté que l'étude de la mathématique et la pratique du travail de groupes avaient apporté aux enfants bien des avantages : goût de la recherche, esprit critique, rigueur d'esprit, goût de l'invention et créativité, esprit d'équipe et établissement de rapports entre enfants sur le plan de l'égalité.

Les rapports entre maître et élèves se sont eux aussi modifiés. Ils sont devenus plus directs et plus francs. La confiance accordée au maître est entière

bien que ce dernier n'échappe pas au cours des séances aux critiques éventuelles de ses élèves. Le dialogue est toujours sincère et naturel, l'expression orale plus vivante et plus riche.

Bien entendu cela a entraîné des répercussions profondes sur l'enseignement des autres matières où il a fallu comme en mathématique abandonner la leçon magistrale au profit de la recherche personnelle dans un groupe de travail.

Conclusion

A une récente réunion, un parent d'élève en souriant nous demanda :

"Mais enfin, pouvez-être sûrs que vous avez réussi ?"

Je lui répondis ce que je pense sincèrement :

"Non je ne suis pas sûr que nous ayons réussi. Mais trois choses pourraient faire dire que nous avons échoué :

1. Nous aurions échoué si nous n'intéressions pas les enfants. Or nous n'avons jamais connu autant d'enthousiasme et de jaillissement d'intérêt dans nos classes. Si bien qu'après la séance de mathématique, très souvent les élèves demandent comme une faveur de ne pas sortir en récréation pour pouvoir continuer à explorer une situation mathématique.

2. Nous aurions échoué si nos élèves calculaient moins bien que ceux des classes traditionnelles. Or ils calculent aussi bien sinon mieux, et surtout ils le font intelligemment car ils réfléchissent au lieu d'utiliser recettes ou mécanismes.

3. Nous aurions échoué enfin si notre école élémentaire n'avait pas rempli son rôle qui n'est plus de permettre d'entrer dans la vie active, mais d'apporter plus que des connaissances mémorisées une formation et des qualités d'esprit permettant d'aborder dans de bonnes conditions des études secondaires".

Ajoutons enfin que l'expérience a montré, une fois de plus, qu'il n'était pas possible d'avoir un enseignement efficace si l'effectif de la classe dépassait 25 élèves, et qu'il faudrait envisager, au moins dans les plus grandes classes (à partir du C.E.2), une certaine spécialisation des instituteurs.

7 - Une sixième après un enseignement rénové à l'école élémentaire

par Louis DUVERT (I R E M de Lyon)

Les 24 élèves (13 filles, 11 garçons) de la 6ème 8 du Lycée Jean-Moulin (Lyon) ont suivi à l'école élémentaire de Francheville-le-Haut un enseignement ordinaire au C.P. et au C.E.1, puis un enseignement rénové en mathématique au C.E.2, au C.M.1 et au C.M.2, puisque l'expérience de Francheville-le-Haut a commencé en septembre 1967 (1). Nous avons obtenu qu'ils puissent rester groupés dans une même sixième.

Je fais partie de l'équipe de Francheville depuis Septembre 1969. Sachant que j'allais être chargé de cette sixième, j'ai assisté à la classe de mathématique du C.M.2 une fois par semaine en 1969-1970.

(1) Voir page 517 le compte-rendu du groupe de travail sur "L'école expérimentale de Francheville-le-Haut".

Les objectifs fixés par l'équipe étaient les suivants :

1°) Maintenir une partie de l'avance quantitative qu'avaient acquise les élèves par rapport aux programmes de 6ème et 5ème.

2°) Continuer à pratiquer des activités mathématiques diverses, sans programme déterminé à l'avance, comme pendant leurs trois années scolaires précédentes.

Nous y sommes parvenus de la façon suivante :

a) Un peu plus de la moitié du temps a été consacré à l'étude, par groupes de quatre, des fiches GALION de 5ème. Pratiquement, le contenu du GALION de 6ème était connu des élèves, à quelques termes près qui ont été acquis "sur le tas" sans difficulté. Nous aurons fait dans l'année un peu plus de la moitié des fiches de 5ème.

b) Une interrogation écrite de contrôle tous les quinze jours.

c) Le reste du temps, activités diverses portant sur : combinatoire, probabilités, études de groupes opérant sur un ensemble, calcul littéral, logique et français, situations concrètes à mathématiser, jeux arithmétiques, calcul sur machines de bureau.

En quoi ces élèves se différencient-ils des élèves ordinaires de 6ème ?

En calcul, ils sont d'un niveau comparable ; ils dominent mieux les propriétés de 0 et de 1, en particulier le fait que 0 est absorbant pour la multiplication.

Ils ne possèdent pas un vocabulaire "moderne" très étendu : délibérément, leurs instituteurs ont employé avec eux le moins possible de termes techniques. En 6ème, ils ont appris le vocabulaire correspondant au programme officiel de 6ème ; ils se constituent chacun un lexique.

Mais ils sont évidemment beaucoup plus familiarisés avec les ensembles, les relations, les structures. Ils sont moins surpris de considérer à la fois des "phrases vraies" et des "phrases fausses".

Ils ont plus d'imagination créatrice, et inventent volontiers eux-mêmes des exemples et contre-exemples personnels (dans leur lexique par exemple).

Ils organisent mieux leur travail : recherche personnelle, travail en groupe (qui est à l'honneur à Francheville et que nous avons conservé), codage des données d'un problème....

Ils ne sont pas gênés ni distraits par la présence dans leur salle de classe de visiteurs.

Nous pouvons dégager, sinon des conclusions, du moins des impressions :

1°) Lorsque le programme de l'école élémentaire aura été véritablement modernisé, et peut-être même à la suite de l'application du "programme 45 rénové 70", il faudra réajuster l'actuel programme de 6ème et de 5ème. D'où la nécessité d'expérimenter dès maintenant des thèmes divers au niveau de ces classes.

2°) Les méthodes ont au moins autant d'importance que les programmes : travail en groupe, situations à mathématiser, souci d'éviter le plus possible le dogmatisme et le conditionnement.

3°) Nous aurions pu envisager de consacrer le temps des activités libres à un seul thème en le poussant assez loin. Pour ma part, je ne regrette pas d'avoir plutôt "papillonné".

4º) Cette expérience me confirme dans une aspiration que je partage avec de nombreux collègues : au lieu des programmes démentiels et contraignants que nous subissons, nous demandons des programmes considérablement réduits dans leur volume, qui laisseraient – sauf dans les classes de niveau très faible – du temps disponible pour des thèmes, choisis librement par le professeur (et peut-être aussi par les élèves dans les grandes classes) parmi une liste suggérée à la suite des programmes officiels et accompagnée d'une documentation à l'usage des maîtres. Je souhaite que l'A.P.M. étudie sérieusement ce problème.

8 - Utilisation de fiches et travail oral

par Anne BRAILLY (Lycée de Sèvres)

Des nombreuses questions posées à Toulouse, à la Commission "Utilisation des fiches et travail oral", certaines ont retenu l'attention de l'animatrice :

Pourquoi des fiches ? Qu'est-ce qu'une fiche ? Comment les fiches sont-elles rédigées ? Pourquoi leur commercialisation ? Comment les utilise-t-on ? L'utilisation des fiches est-elle compatible avec un effectif important ? avec le contenu des programmes ? Quelle est la place du travail oral ?

Les lignes qui suivent, rédigées après ce débat, essaient d'apporter des réponses à ces questions, non définitives certes, et dont l'auteur espère qu'elles susciteront quelques commentaires.

La réforme de l'enseignement ne se limite pas à agir sur le contenu des programmes. La façon d'enseigner importe plus encore que le contenu.

L'enseignement des mathématiques, pour être vraiment utile au plus grand nombre, *doit être un enseignement dynamique, de découverte par l'enfant, un enseignement ne conditionnant pas à un seul mode de pensée, et développant de pair réflexion et action.* Ce but sera plus aisément atteint dans le premier cycle des lycées si on a souvent recours à l'étude de situations familières, nombreuses et variées. L'étude d'une situation consiste à y mettre de l'ordre, à l'organiser, à chercher les lignes suivant lesquelles s'exercent réflexion et action. Le rapprochement de certaines de ces études permettra de dégager des idées générales, des structures. Ainsi l'enfant ne sera pas mis en présence de la mathématique toute faite, il sera naturellement conduit à mathématiser lui-même.

Notons toutefois que l'étude de situations variées ne doit pas conduire à un émiettement des connaissances : un des rôles du professeur est précisément, après une période d'étude de situations, de recherches, et de découvertes, de provoquer et d'organiser des *synthèses*. Ces synthèses permettent de dégager des notions applicables par la suite à la résolution d'exercices pour lesquels on évitera de commencer le libellé des questions par "montrer que...", une telle rédaction a pour conséquence d'escamoter la partie, la plus difficile certes, mais aussi la plus riche, du travail mathématique.

I – Les moyens pédagogiques

Les expérimentateurs, qui d'ailleurs ne possédaient aucun ouvrage sur les nouveaux programmes, ont décidé de préparer des fiches de travail, et de les rédiger avec le souci de faire un enseignement ayant les caractères qui viennent d'être évoqués.

La commercialisation de ces documents a pour but de fournir aux collègues abordant les nouveaux programmes, sinon une solution, du moins un thème de réflexion dans la recherche d'un progrès de la pédagogie.

Ces fiches permettent à l'élève de construire lui-même son propre manuel : un manuel où rien ne sera inutile, où chaque paragraphe aura été l'objet de réflexion et qui constituera de ce fait un remarquable outil, un solide élément de référence auquel l'élève pourra se reporter à tout moment avec la plus grande aisance. Dans ces fiches, point de longs chapitres de cours mais surtout des exercices, des questions posées, de la façon la plus ouverte possible. Les exercices ont un double but : ils permettent d'illustrer une notion, rôle qui fut toujours celui des exercices, mais surtout ils peuvent encore, et avec efficacité, permettre d'introduire une notion, d'en faciliter la découverte et la compréhension.

Les auteurs des fiches qui ont souvent des conceptions différentes quant à la présentation, à la rédaction, accepteraient presque tous la description qui vient d'être faite du contenu des fiches.

Tous sont aussi d'accord sur le fait qu'elles ne constituent pas la panacée en matière d'enseignement et qu'il n'existe pas une méthode pédagogique qui constitue à élaborer des fiches, à les faire étudier par les élèves, individuellement ou en équipes. En fait, un même maître a recours, dans une même classe, et parfois au cours d'une même heure, à plusieurs techniques pédagogiques. Il doit avant tout rester attentif aux réactions de ses élèves qui dictent son attitude. Le but poursuivi, évoqué au début de cet exposé, sera plus aisément, et plus sûrement, atteint si l'enseignement par fiches n'exclut pas la vie collective de la classe, si l'utilisation des fiches s'accompagne de moments de travail oral.

II – Utilisation de fiches et travail oral

Il est impossible de décrire les différentes conceptions d'utilisation de ce matériel que sont les fiches. Tel professeur demande à ses élèves un travail surtout individuel, tel autre les invite le plus souvent à travailler en équipes.

Quelle que soit la méthode adoptée, aucun professeur ne croira à une étude faite *exclusivement* par fiches. Tous attachent une certaine importance au travail oral qui peut intervenir notamment :

- lors de la préparation d'une notion
- lors de la révision de certaines questions
- quand une synthèse se révèle nécessaire
- avant l'introduction d'un nouveau symbole
- pour faciliter certaines formulations difficiles à obtenir individuellement.

Les lignes qui vont suivre vont donner des illustrations de ces différents aspects du travail oral.

1 - Préparation d'une notion

Bien souvent il y a intérêt à ne pas distribuer trop rapidement une fiche. Cela risquerait de déflorer un sujet que l'on préfère préparer par un jeu ou un débat oral dont il ne reste alors aucune trace dans la rédaction de la fiche.

Par exemple : une sorte de "jeu de Kim" prépare l'étude de *l'inclusion*. Des objets sont déposés sur le bureau, puis cachés. Les enfants disposent de quelques minutes pour les observer et doivent ensuite écrire l'ensemble des objets dont ils ont gardé le souvenir. On obtiendra ainsi des "parties" de l'ensemble des objets exposés et, avec un peu de chance, la partie pleine et la partie vide. L'inclusion sera bien préparée.

C'est aussi un jeu qui, en sixième, précède l'*introduction des entiers relatifs*. C'est le jeu des boulons et des écrous dont les étapes sont brièvement retracées dans les fiches (Edition Magnard, 122 boulevard Saint-Germain, PARIS 6ème).

On pourrait citer bien d'autres exemples de travaux, ou jeux collectifs, non évoqués, ou brièvement évoqués, dans les fiches. et destinés à préparer l'introduction d'une notion.

2 – Révisions

Les révisions, telles celles sur les relations en quatrième ou sur **R** en troisième, donnent aussi lieu à cette forme de travail collectif.

3 – Synthèses

Les synthèses prennent une importance croissante au cours du premier cycle. En sixième des notions sont approchées mais il y a peu de formalisation. Les concepts sont rarement dégagés, c'est plutôt le stade "descriptif" de situations nombreuses, variées, mais simples. Ainsi étudie-t-on des relations et remarque-t-on, en sixième, qu'elles jouissent de telle ou telle propriété. C'est plus tard qu'on rapprochera diverses études de relations symétriques, réflexives et transitives. De telles relations ayant été souvent rencontrées on leur donnera un qualificatif : ce sera les *relations d'équivalence*.

Un travail analogue de rapprochement de situations mettant en évidence des relations antisymétriques, transitives et réflexives, conduira au concept de *relation d'ordre*.

L'étude collective, et le classement qui en résulte, de schémas cartésiens ou de schémas sagittaux d'un grand nombre de relations permettra de distinguer *fonctions*, *applications* et *bijections*.

C'est après qu'ait eu lieu un tel travail collectif que sera distribuée la fiche sur laquelle sont rédigées les définitions d'une fonction, d'une application, d'une bijection. Il est nécessaire que les élèves aient à leur disposition une définition correcte de ces différents types de relations mais il est non moins nécessaire que ce soit *eux* qui en fassent la découverte.

Une notion comme la *notion de groupe* se prépare pendant un temps plus long encore. De nombreux exemples de groupes finis sont étudiés, les tables sont construites sans qu'il soit explicitement question de groupe. Il est donc normal à un certain moment de faire l'inventaire des parties du cours et des exercices déjà faits, susceptibles d'être utilisés pour dégager la notion de groupe.

Cet inventaire est construit par les réponses qu'apportent les élèves à la question "Quelles sont les tables d'opération rencontrées en sixième, cinquième, quatrième ?" Chacune de ces opérations a fait l'objet d'une étude au moment où elle a été rencontrée : ses propriétés ont été recherchées. Mais toutes ces

études ont été réparties sur plus de 2 ans : une mise au point s'impose donc à un certain moment. Une nouvelle notion sera dégagée de la confrontation de divers exemples.

Trois opérations peuvent finalement être retenues parmi les propositions des élèves ; un nombre plus grand disperserait l'attention.

Dans le travail fait à Sèvres :

L'exemple 1 illustre la partie du programme intitulée : composition des bijections

E = { R, S, T, U, V, W } E est l'ensemble des bijections dans un ensemble à trois éléments.

L'exemple 2 dans lequel on reconnait le groupe de Klein est résulté de l'étude des symétries du rectangle.

L'exemple 3 est un exercice d'arithmétique dans Z (congruences modulo 2) facile et intéressant.

Le travail consiste alors à trouver les propriétés communes aux 3 opérations. La recherche peut être faite par équipes en invitant les élèves à organiser cette recherche et à présenter les conclusions de la façon la plus nette, la plus expressive.

Propriétés	Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3

Le rapprochement de ces exemples permet de constater qu'il s'agit dans chacun des cas étudiés d'une opération dans un ensemble E :

- interne
- associative
- telle qu'il existe dans l'ensemble considéré un élément neutre pour cette loi
- telle que tout élément de E admet un symétrique pour cette loi.

La *notion nouvelle* est alors dégagée :
on dit que l'ensemble E est muni par cette loi d'une structure de *groupe.*

Remarque : L'associativité, non en évidence sur les tables, doit faire l'objet de commentaires. Pour établir cette propriété de nombreuses vérifications sont nécessaires : elles peuvent effectivement être réalisées dans l'exemple 3.

Pour *vérifier l'assimilation de la notion de groupe* un retour à l'inventaire fait au début de ce travail de synthèse sera nécessaire. Il importe en effet de bien

savoir *reconnaître un groupe* ; les élèves devront faire une partition de l'ensemble des exemples inventoriés en deux classes :

d'une part, ceux dans lesquels l'opération munit l'ensemble d'une structure de groupe,

d'autre part, .., les autres.

Les conclusions de ce travail de synthèse se retrouvent dans une fiche, mais il y a aussi les synthèses dont on ne trouve aucune trace dans les fiches-élèves ; moins "denses" mais non moins nécessaires, elles interviennent lorsque le professeur remarque une difficulté à comprendre le fil conducteur d'une fiche, à saisir l'objet d'une étude. Peut-être s'agit-il là plus de mises au point que de synthèses véritables ? Quoi qu'il en soit, ces moments de travail oral sont toujours rentables puisqu'ils permettent un nouveau départ sur un terrain sûr.

4 – Formulation

Une fiche où tous les *énoncés de théorèmes* seraient rédigés négligerait un des aspects très formateurs de l'enseignement des mathématiques : l'apprentissage d'une bonne formulation.

Dans de nombreuses fiches sévriennes, en géométrie surtout, un guide est fourni aux élèves pour la démonstration d'un théorème. Des questions correspondent aux diverses étapes à parcourir. Ces questions sont d'autant plus précises que la difficulté a paru plus grande aux rédacteurs. Il importe que, ces étapes parcourues, les élèves comprennent le résultat qu'ils ont obtenu et un cadre est destiné à recevoir le libellé du théorème démontré. Rarement les élèves sont capables de donner une formulation correcte. Elle est en général, sinon incorrecte, du moins incomplète. Il est bon et efficace de faire discuter collectivement certaines propositions d'énoncées.

Un travail collectif est également intéressant lorsqu'il s'agit d'introduire un nouveau symbole ; un symbole qui apparaîtrait artificiellement dans une fiche ne serait pas compris. Il faut que les élèves en aient senti la nécessité : seule une discussion collective orale montrera au professeur si le moment de l'introduction est venu ; ce moment peut se situer bien avant que soit étudiée la fiche dans laquelle le symbole fait son apparition.

III – Intérêt du travail sur fiches

1) Tout ce qui précède montre assez l'intérêt d'un travail par fiches. L'utilisation de fiches, surtout si elle s'accompagne d'un travail oral tel celui qui vient d'être décrit, permet une *pédagogie vivante, de vraie découverte.* Le travail oral collectif respecte malgré tout le rythme de chaque enfant si possibilité est donnée aux plus rapides de faire des fiches supplémentaires ou des exercices portant la mention "facultatif".

2) Le travail par fiches est soumis à un *contrôle permanent du professeur* circulant dans sa classe, toujours prêt à dialoguer, à conseiller, à tirer parti d'une erreur relevée.

3) Les fiches ont une *grande souplesse d'utilisation* et ne figent pas le cours dans une forme définitive. L'utilisation, l'exploitation suggèrent des modifications. Il est facile de refaire une fiche qui n'a pas été satisfaisante, de créer une fiche supplémentaire si une notion "passe mal".

Le travail sur fiches, intéressant et efficace, appelle toutefois une réserve. Si les connaissances ainsi acquises sont plus solides, il convient de noter que cette acquisition exige plus de temps, compte tenu de la participation *réelle* de chaque enfant à la recherche et à la découverte. Il serait donc souhaitable d'avoir des programmes allégés et des effectifs raisonnables !

Il est intéressant, pour conclure, de donner les impressions d'une équipe travaillant à l'élaboration et à l'expérimentation des fiches. A Sèvres les membres de l'équipe (au nombre de quatre) se réunissent chaque semaine durant quatre heures. Un sujet a été proposé la semaine précédente comme thème de réflexion à toute l'équipe. Ses projets, qui ont fait l'objet d'une rédaction sommaire, sont étudiés collectivement et critiqués. Critiques franches, directes et constructives, acceptées sans réticence par les auteurs. La rédaction définitive est faite collectivement après accord sur un plan donné. Il est apparu en effet que c'est au moment de la rédaction qu'apparaissent les principales difficultés.

Il convient de noter que les fiches sont rédigées semaine après semaine en tenant compte des réactions des élèves aux fiches déjà étudiées. Une partie du temps de réunion est d'ailleurs réservée à la discussion des modifications qu'il est nécessaire d'apporter aux fiches déjà traitées pour tenir compte des observations faites. De temps en temps, lorsque se présente la nécessité de faire un choix sur la façon de traiter une partie assez importante du programme (exemple : relations d'incidence en géométrie affine, introduction des entiers relatifs), a lieu dans l'équipe une réunion-débat au cours de laquelle aucune rédaction n'est faite.

Les membres de l'équipe de Sèvres estiment devoir beaucoup à ce mode de travail. Ils ont gagné un approfondissement de leurs connaissances et ont, en outre, appris à s'écouter et à se comprendre. Les jeunes collègues qui, assurant le remplacement d'un des membres en congé, se sont trouvés admis dans l'équipe ont apporté leur jeunesse et leurs connaissances toutes fraîches et ont, en échange, estimé avoir beaucoup bénéficié de l'expérience des plus anciens.

9 - Interprétation mathématique de quelques problèmes linguistiques

par J. et A. ROUMANET, professeurs de Français et de Mathématiques au Lycée Rodin, Paris.
Service des Etudes et Recherches Pédagogiques - I.N.R.D.P.

En ce qui concerne la coordination entre Français et Mathématiques, deux choses sont à distinguer :

– Le professeur de Français qui veut tenir compte, dans sa classe, des données de la linguistique, et qui par conséquent essaye de se recycler dans cette science, éprouve le besoin d'une certaine *information* en mathématique : au niveau du vocabulaire employé, au niveau de certains outils mathématiques, et de quelques notions (en combinatoire par exemple). Un recyclage en Mathématiques à l'intérieur d'un établissement, fait par des professeurs de Mathématiques pour les professeurs de Français désireux de rénover leur enseignement, serait sûrement toujours bien accueilli ! Il faut cependant ajouter que cette information ne peut se faire que dans les deux sens et qu'il serait bon que les professeurs de Mathématiques s'intéressent également à la linguistique.

– Indépendamment de cette information (et même si elle est impossible à réaliser), il nous semble que le professeur de Mathématiques et celui de Français peuvent (et doivent), *au niveau de la classe,* essayer de coordonner objectifs, méthodes et activités.

Dans l'expérience suivante, les deux professeurs qui n'avaient pas été auparavant dans le même établissement, en étaient restés jusque là au stade d'une simple réflexion commune sur méthodes, objectifs et exercices semblables. Depuis un an, étant dans le même établissement, ils ont essayé de réaliser dans leur classe de 4ème une véritable coordination entre les deux disciplines.

I – Objectifs et objet d'étude

Le professeur de Français, qui participe par ailleurs à l'I.N.R.D.P., à une expérience sur l'application de la linguistique à l'enseignement du français dans le 1er cycle, a pour principal objectif d'accroître la capacité d'expression et de compréhension des élèves, dans les différentes situations de communication où ils pourront se trouver. Cette maîtrise de la langue semble passer par une connaissance claire, explicite des structures et des règles de la langue, du fonctionnement de la phrase et des transformations. La langue apparaît alors comme un objet, une réalité concrète, dans laquelle on cherche un ordre, un système ; objet démontable, système analysable dans lequel une intervention entraîne un certain nombre de conséquences prévisibles au moyen de règles de fonctionnement. Il s'agit de retrouver ces structures, de découvrir ces règles en partant du "discours", c'est-à-dire de réalisations écrites et orales, donc d'un objet familier connu.

En mathématiques, l'objectif est d'accroître la capacité de compréhension et de prise sur le réel, et en même temps de fournir aux élèves des moyens d'expression autres que ceux de la langue. Ici aussi, il s'agit d'étudier le "réel", c'est-à-dire des situations concrètes ou familières, dont on dégagera des règles, de trouver un système qui permette de les décrire et par suite de mieux les maîtriser.

II - Méthodes

1) Le matériel sur lequel on travaille en Français (mots, groupes de mots, phrases, textes) est presque toujours produit par les élèves, qu'il soit écrit ou oral (magnétophone). La motivation est ainsi plus grande car les enfants se sentent concernés de plus près. On travaille donc sur des faits *vivants* (on s'adresse aux productions des élèves, mais aussi à la presse : radio, T.V., journaux), *familiers* et *concrets.*

En mathématiques, on essaie de partir soit de situations familières proches des élèves, soit de matériels qu'ils ont construits eux-mêmes ou au moins manipulés abondamment.

2) De plus, ce matériel se présente souvent sous forme de jeux et les exercices sous forme de manipulations (phrases à découper, classer, déplacer) qui visent à la découverte des structures de la phrase et des *règles* de fonctionnement.

La manipulation joue, en classe de mathématiques, un rôle tout aussi important dans la découverte des règles. En 6ème et 5ème surtout, le jeu est non seulement activité courante mais aussi objet d'études.

3) Enfin, on travaille un peu dans le même *esprit* : dans les deux disciplines, les élèves travaillent d'une manière *active* : chacun cherche et apporte sa part à la découverte ; la *recherche* se fait dans un climat de liberté et de tolérance : les réponses ne sont pas dévalorisées : tout peut être intéressant, même les erreurs, qui sont étudiées (erreur par rapport à quoi ?) et utilisées finalement. La *discussion* règne dans la classe, permettant à chacun de donner et de défendre son point de vue. Enfin, on travaille en *équipes* de 3 ou 4 élèves (sauf pour ce qui est production de matériel et exercices de contrôle).

III – Activités et exercices

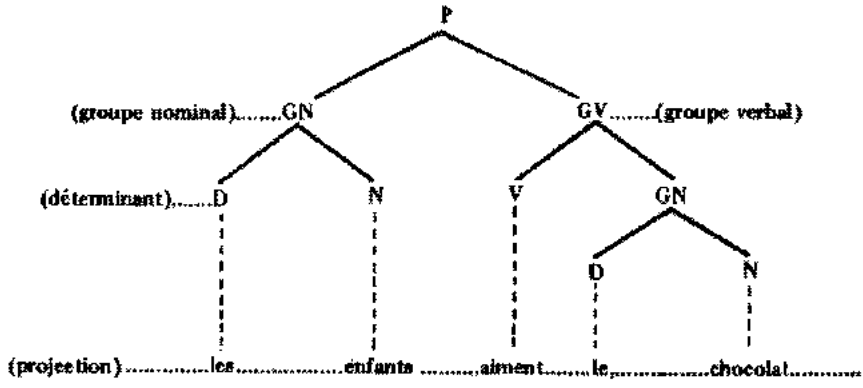
Un certain nombre d'activités ou d'exercices permettent soit d'utiliser en Français des outils et des notions dégagées en classe de Mathématiques, soit d'approfondir ou découvrir une notion en mathématique, en utilisant et complétant ce qui a été commencé en Français.

– 1) On a souvent à faire en français des exercices de *classification* : mots (déterminants), groupes de mots (éléments constituant le groupe nominal), phrases (différents types de phrases), textes (titres de journaux, articles) ; ils sont produits ou fournis par les élèves, recueillis par le professeur et redonnés aux élèves sous forme de listes, de tas de papiers... Il s'agit alors de mettre de l'ordre dans ce désordre, de classer, d'organiser, de trouver des critères, d'en choisir un et de savoir s'y tenir ; parfois de classer les objets selon deux critères. Il s'agit aussi de *présenter* le résultat de ce travail de la manière la plus claire et la plus parlante ("patates", tableau, arbre, diagramme sagittal...).

On retrouve ici les exercices que l'on pratique en mathématique lorsqu'on veut réaliser une partition ou le croisement de deux, trois ... partitions définies sur un même ensemble.

2) La découverte des structures de la phrase simple s'accompagne de la construction de *schémas arborescents* rendant le mieux compte des structures fondamentales de la phrase, des notions de syntagme (groupe de mots), de subordination, de récursivité de la langue ; de la notion de catégorie et de celle de fonction (la fonction est donnée par la place dans l'arbre et par les niveaux de l'arbre).

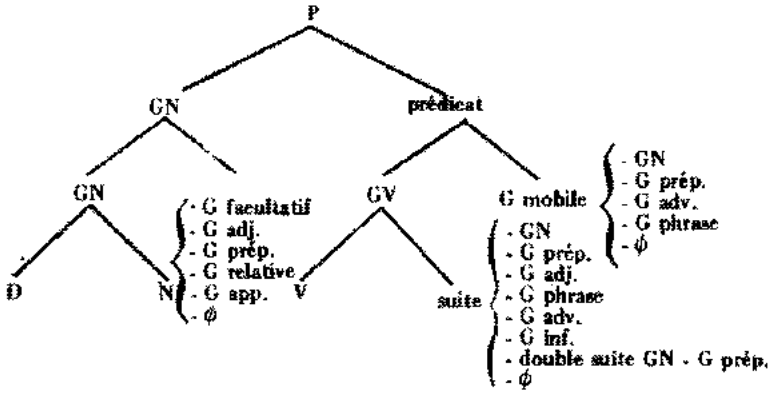
Exemple : P (= phrase) = les enfants aiment le chocolat.



Ces arbres permettent de distinguer deux choses dans la phrase : ce qui est *modèle,* capable de générer une infinité d'autres phrases (l'arbre), et ce qui est *réalisation linéaire* (projections), c'est-à-dire la phrase, l'énoncé.

On part de l'*énoncé,* et c'est par rapport à lui (P) qu'on analyse, jusqu'à arriver à la catégorie (D, N, V...) alors que la grammaire traditionnelle privilégie *le mot* et part de lui en lui attribuant une nature et une fonction.

Un arbre, rendant compte de la phrase du "type sujet-verbe" et de toutes ses constructions possibles, serait le suivant :



Bien sûr, aussi bien sur le plan de la théorie linguistique que sur le plan de l'application pédagogique, ces arbres sont critiquables à plusieurs titres. Nous en sommes conscients et essayons sans cesse de résoudre les problèmes qui se posent. Il n'en reste pas moins qu'ils permettent de *visualiser* les choses ; de *construire* et de décrire en même temps (ils sont à la fois *outil de recherche* et moyen de communiquer ses découvertes) ; de développer aussi bien l'esprit d'analyse que l'esprit de synthèse ; de donner une certaine prise sur les énoncés (ils permettent par exemple de lever les ambiguïtés puisqu'il peut y avoir 2 arbres différents pour les 2 sens d'une même phrase).

On utilise souvent en mathématique l'arbre en tant qu'outil de découverte et de description, par exemple pour les produits d'ensembles, les dénombrements, les croisements de partitions, etc... Mais le plus voisin de l'arbre de phrase est celui qui permet de décrire un calcul algébrique.

— 3) En même temps qu'ils construisent des "arbres", les élèves découvrent des *règles de réécriture* de la phrase.

Exemple : P ⟶ GN - GV (phrase se réécrit groupe nominal, groupe verbal)

Autre exemple : GN ⟶ D - N - G prép (groupe nominal se réécrit : déterminant, nom, groupe prépositionnel).

Ont souvent été pratiqués des exercices de ce genre :

— soit mettre en *formules* (du type ci-dessus) des phrases données (ou des groupes)

— soit plus souvent écrire des formules et *chercher des exemples répondant à ces formules* ou encore écrire des arbres et imaginer des projections de ces arbres.

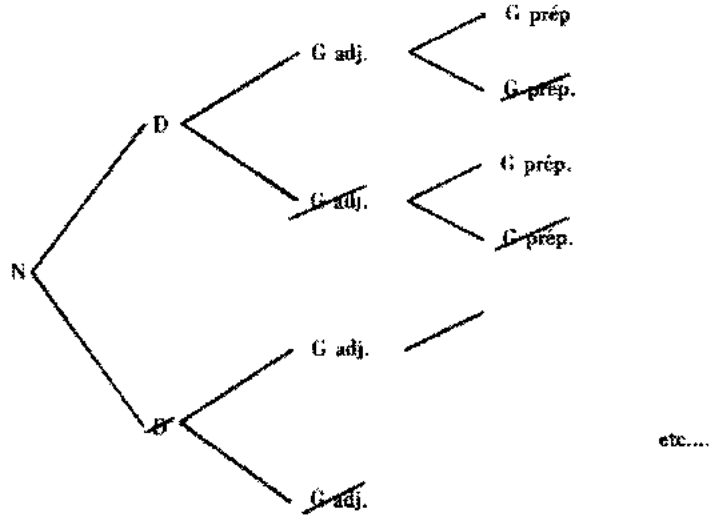
Ces exercices sont très proches des exercices de codage et décodage que l'on rencontre en mathématique quand on formalise une situation.

– 4) A propos du Groupe Nominal, un premier travail a consisté à trouver *une formule contenant en puissance toutes les formules de G.N. possibles*. Pour cela, des exercices de substitutions et d'expansion permettaient de rendre compte des différents éléments pouvant entrer dans la composition du G.N.

Le seul obligatoire étant le nom : N, et tous les autres (D, G prep, G relative, G adj., G app.) étant facultatifs, nous pouvions arriver à la formule suivante (les parenthèses indiquant le caractère facultatif des constituants).

GN → (D) *N* (G adj.) (G prep.) (G rel.) (G app.)

Après quoi, pour "développer" cette formule, certains élèves ont procédé par tâtonnements, d'autres ont pensé à l'arbre d'investigation, dichotomique :



Ce qui nous permettait d'écrire 32 formules différentes ; après quoi il nous restait, en français, à nous demander lesquelles étaient réalisables dans *la langue* et lesquelles étaient "difficiles", et pourquoi.

On retrouve ici le problème du dénombrement des parties d'un ensemble (à 5 éléments). Le travail commencé en Français a été repris en mathématique de la manière qui suit :

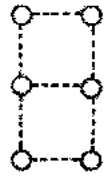
Avant cette recherche, les élèves ont résolu les exercices suivants :

1/ On se donne un alphabet de 4 lettres (5 lettres, 6 lettres), a, b, c, d, et on veut écrire tous les assemblages respectant les deux règles suivantes :

– une lettre ne peut pas être placée après une autre lettre qui la suit dans l'ordre alphabétique.

– chaque lettre doit apparaître au plus une fois dans un assemblage.

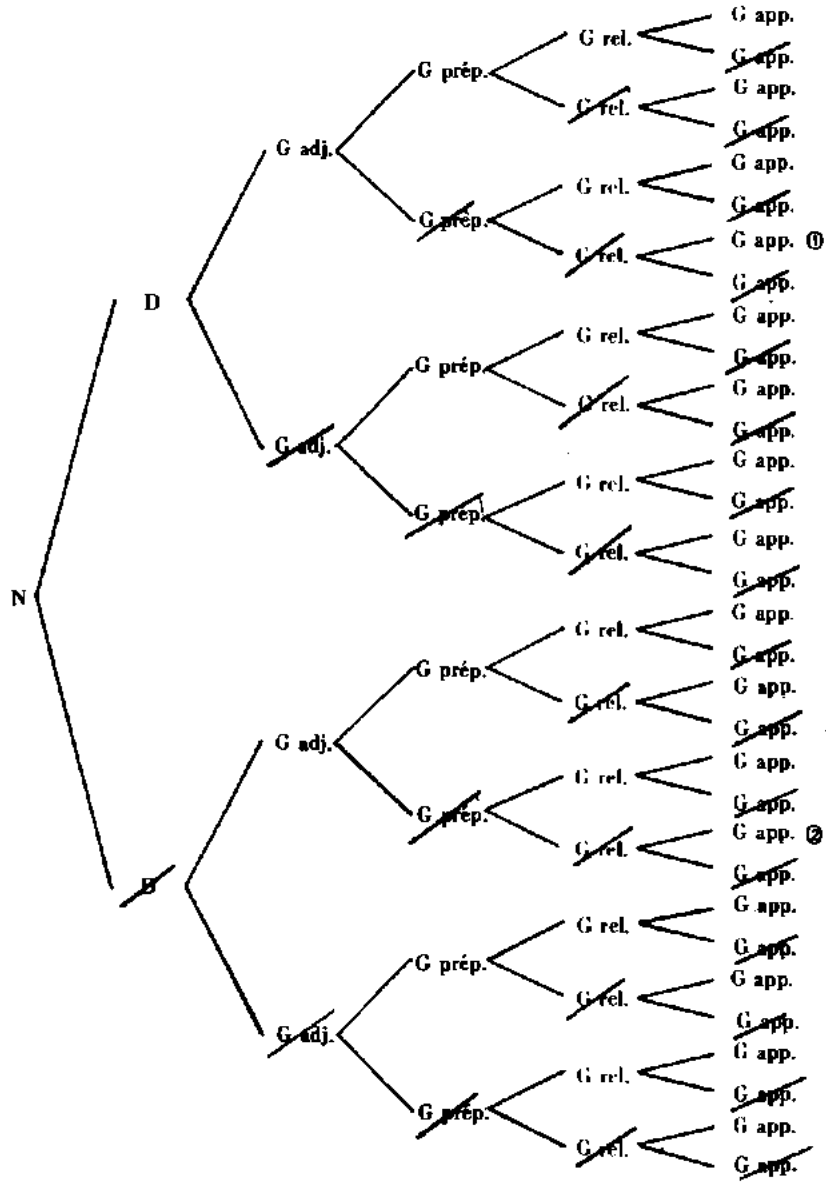
2/ Une lettre ou un signe en braille est constitué par des trous placés sur certains des 6 emplacements disposés sur un rectangle comme ci-contre :



Combien de signes distincts peut-on réaliser ?

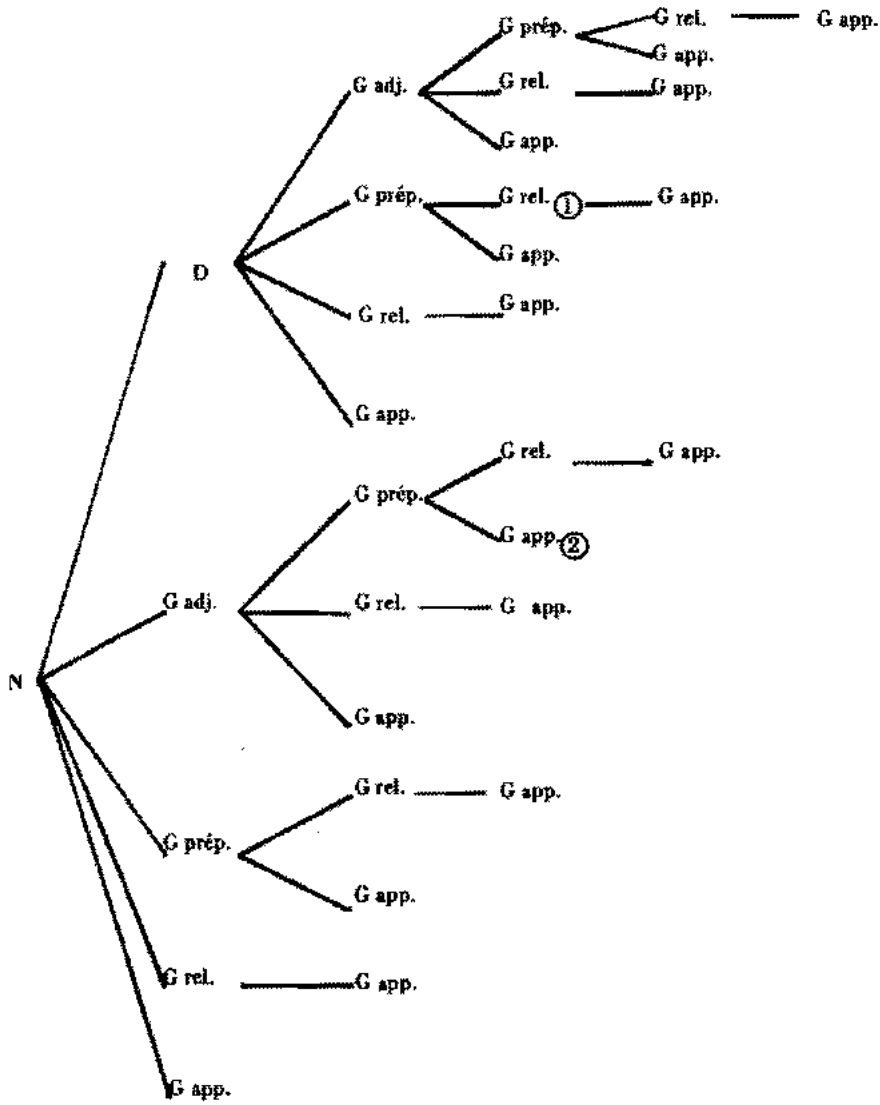
Tous ces exercices peuvent se résoudre par des arbres de 2 types. Reprenons les 5 éléments facultatifs du GN. : P, G.adj., G. prép., G. rel., G. app.

1er arbre, celui proposé d'abord par certains élèves :



Ainsi l'extrémité (1) correspond à : N, D, G.prép., G.rel. et l'extrémité (2) correspond à : N, G. adj., G. prép., G. app.

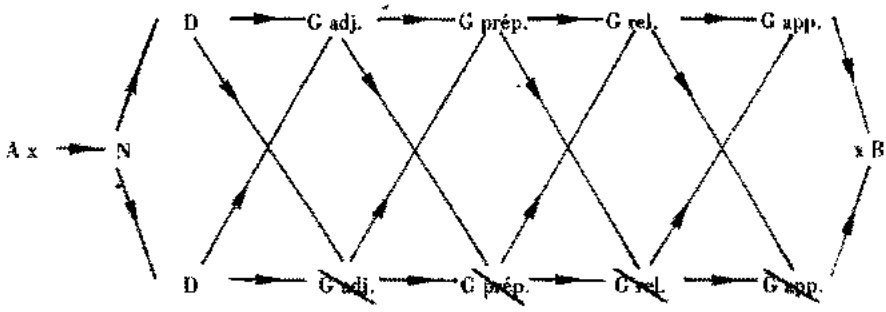
2ème arbre : On décide de citer les éléments du GN toujours dans le même ordre : D, G.adj.,G.prép., G.rel., G.app, par exemple :



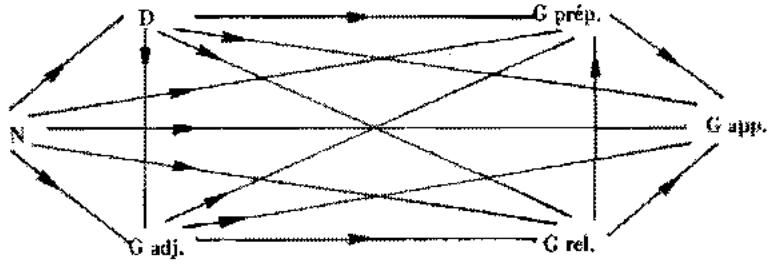
Tout chemin allant du départ N à un noeud quelconque de cet arbre représente une formule possible. On retrouve (1) et (2) cités plus haut.

A côté de ces deux arbres les élèves ont proposé deux autres présentations qui pourraient permettre d'établir la liste complète des formules.

1ère présentation : Dans ce schéma, toute formule est un chemin allant de A à B :



2ème présentation : Dans ce schéma, toute formule est un chemin partant de N et aboutissant à l'un quelconque des sommets :



Toutes ces présentations ont un inconvénient : elles donnent les constitutions possibles du G.N. sans tenir compte des contraintes internes. Y-a-t-il un ordre obligatoire pour les constituants ?

— 5) Un autre exercice pouvant donner lieu à une interprétation mathématique est le suivant : travaillant sur un thème (ex : la discussion, la joie) les élèves essayent de faire l'inventaire, à l'aide du dictionnaire, de tous les mots relatifs à ce thème. Pour cela, ils partent d'un terme, qui les renvoie à un certain nombre d'autres termes, chacun de ces termes les renvoyant encore à d'autres, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on n'en trouve plus de nouveaux. Après quoi on essaye d'établir les contraintes d'ordre sémantique et grammatical qui existent pour certains des mots trouvés (verbes et noms).

Cet exercice donne un exemple de recherche de la fermeture transitive d'une relation.

— 6) Enfin, à propos de l'étude de textes, on peut se livrer, en français, à des exercices de ce genre : les élèves établissent le pourcentage d'apparition d'une catégorie de mots (ex : les adjectifs) par rapport au nombre total de mots ; on fait ce travail sur plusieurs textes de 100 mots, aussi variés que

possible ; on établit une espèce de moyenne qui permet de comparer ensuite d'autres textes, et de tirer des conclusions d'ordre plus "littéraire". On peut également, dans le même ordre d'idées, comparer l'abondance relative des noms et des verbes dans un même passage, ou encore celle des verbes d'action et des verbes d'état,etc..., ces comparaisons s'appuyant sur des moyennes auparavant établies.

Ce genre d'exercices fournit dès la 6ème ou la 5ème, une motivation à l'introduction de notions élémentaires de statistiques.

Ces essais de coordination nous apparaissent dans l'ensemble insuffisants : ils portent sur certains points seulement (mais peut-il en être autrement si l'on veut respecter la personnalité de son enseignement ?) et ils ne proposent que des moyens de *description* (sans doute, si les élèves étaient plus avancés dans cette étude de la langue, pourrait-on utiliser des notions plus *opératoires ?).*

Nous pensons reprendre nos essais l'année prochaine, avec une classe de 6ème, d'une manière un peu plus systématique et régulière.

10 - Problèmes posés par les liens possibles entre les enseignants de la grammaire et des mathématiques dans le premier cycle du second degré

par J. ROUAULT

Ce texte reflète les travaux d'une équipe d'enseignants de l'Académie de Grenoble. Il a été préparé et rédigé par :

Mmes S. GASQUET (Lycée Champollion de Grenoble)
J. VEYRUNES (Lycée Mounier de Grenoble)
(Professeurs de mathématiques)

MM. J. ROUAULT Maître assistant à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
G. VEILLON Maître de Conférences à l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

Introduction

Depuis près d'un an fonctionne à Grenoble une équipe de recherche pédagogique qui s'est fixé comme but de repenser l'enseignement de la grammaire et d'examiner comment cet enseignement peut se relier à celui des mathématiques. La révision d'un tel enseignement, qui est sans doute l'un des besoins les plus pressants du Second Degré, est dûe pour une bonne part à la méconnaissance des théories linguistiques actuelles. Nous avons voulu essayer de montrer qu'une utilisation simple de certaines de ces théories pouvait conduire l'élève à prendre conscience du *fonctionnement* de la phrase française et qu'une démarche claire et prudente pouvait conduire à un degré d'abstraction raisonnable. La méthode que nous essayons d'élaborer doit, à partir de manipulations intuitives, faire accéder l'élève à certains concepts linguistiques (ici la notion de structure).

A partir de là on peut considérer que la grammaire devient une véritable science du raisonnement, comme les mathématiques, et chercher à voir les échanges qui peuvent avoir lieu entre les deux disciplines-clés du raisonnement que sont la linguistique et les mathématiques. Il convient ici de bien savoir que ces échanges peuvent avoir lieu dans les deux sens : les mathématiques peuvent aider, en fournissant un support formel, à la compréhension des concepts linguistiques. Mais ces derniers peuvent motiver certains concepts mathématiques, les illustrer et les faire manipuler dans une autre réalité. Une telle démarche n'est pas à priori facile à mettre en oeuvre mais il nous semble que l'on pourra parler d'échec de l'enseignement des mathématiques tant que celui-ci ne consentira pas à sortir de cette démarche hautaine qui consiste à en faire LA Science. A notre sens les problèmes actuels de l'enseignement mathématique ne se résoudront pas par la mise en oeuvre de programmes toujours renouvelés et la plupart du temps toujours plus ambitieux et abstraits, mais par l'humble souci de rattacher les mathématiques à la réalité (c'est-à-dire aux sciences moins "pures").

Le présent travail se situe dans cette voie, il est une tentative pour présenter la grammaire de telle sorte qu'elle puisse être assimilée par l'élève et qu'elle puisse se rattacher à l'enseignement mathématique. Ce travail se présente surtout comme un exposé d'idées que nous avons mises au point sur l'enseignement de la grammaire (et qui seront expérimentées dès la rentrée) et de problèmes que pose la présentation mathématique de concepts linguistiques. Nous n'avons pas à l'heure actuelle de doctrine claire sur les liens entre mathématiques et grammaire : ce n'est pas par manque d'intérêt mais de temps, la recherche pédagogique ne disposant pas, comme chacun sait, de moyens exorbitants.

L'équipe qui a élaboré le projet a été réunie à l'initiative de J. PLAZY, Professeur agrégé de grammaire au centre de formation des P.E.G.C. de Grenoble. Elle comprend des professeurs de lettres et de mathématiques de l'Académie de Grenoble ; elle a bénéficié jusqu'à maintenant de l'appui de chercheurs en linguistique, mathématique et Informatique du Centre d'Etudes pour la Traduction Automatique de Grenoble. Reconnue par l'I.P.N. elle sera liée l'année prochaine à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble.

I - Ligne directrice

1- Principes

a) Abandonner le caractère normatif de la grammaire ("ce qu'il faut dire") au profit des "registres de langues".

b) Déconditionner les élèves de la grammaire traditionnelle dont une partie importante est consacrée à (mal) nommer des fonctions. Nous voulons privilégier le fonctionnement par rapport à la théorie et à la nomenclature.

c) Introduire les concepts élémentaires de linguistique à travers l'étude de la phrase française.

d) On peut alors passer à la logique du raisonnement et aux outils mathématiques associés aux concepts linguistiques introduits.

e) Les applications d'un tel enseignement de la grammaire se trouvent alors :

- en mathématiques (échange en sens inverse du précédent)
- dans l'apprentissage des langues étrangères.

2- Les concepts introduits au II s'insèrent dans les classes de 6ème et 5ème, une programmation plus stricte ne pouvant se faire qu'après expérimentation dans les classes. La méthode repose sur une démarche inductive qui, partant de manipulations intuitives sur la langue, aboutit au concept de structure. Nous donnerons au II un bref aperçu de la démarche ainsi que différents exemples de ce que nous entendons par structure ; nous préciserons ensuite la nature formelle des structures utilisées ici (qui se rapporchent des structures de dépendance de Tesnière) ainsi que des structures de constituants qui se fondent, elles, sur les grammaires génératives. Nous examinerons enfin les problèmes pédagogiques soulevés. Signalons que les concepts présentés ici ne permettent pas de prendre en charge tous les phénomènes grammaticaux du français ; ils nous semblent illustrer de façon suffisamment claire le fonctionnement de la phrase pour que leur intérêt ne puisse être mis en cause. Cependant il faudra compléter ces notions avec d'autres outils permettant (en 4ème et 3ème) de traiter le fonctionnement du verbe, son actualisation ainsi que celle du nom.

II - Aperçus sur le point de vue grammatical

Nous proposons de commencer par des manipulations intuitives —appelées "jeux"— sur la langue ; une période de trois mois au moins, au début de la 6ème, leur serait uniquement consacrée. L'introduction de concepts théoriques peut se faire dès que cela est possible ; à partir de ce moment peuvent coexister longtemps les jeux et les "leçons" de grammaire.

—1— Les jeux

Deux types peuvent coexister : ceux qui servent à introduire les concepts théoriques et ceux qui sont liés à la créativité.

a) Les jeux introductifs de concepts théoriques sont :

(1) Les commutations (analyse distributionnelle) : partant d'une phrase donnée chercher ce que l'on peut substituer aux mots ou groupes de mots. Ceci aboutit à la définition de classes d'équivalence de mots et à la mise en évidence des principales fonctions syntaxiques.

Exemple :

l'	enfant	aborde	un	problème	délicat
*	Pierre	mange	de la	viande	saignante
cet	homme	achète	les	livres	qu'on lui propose
Ma	femme	lave	le	linge	des enfants

(2) Les permutations : elles consistent à changer la place de groupes de mots dans la phrase pour insister sur la fonction syntaxique, qui est à priori indépendante de la place. On pourra à ce propos faire sentir l'influence des permutations sur le style et examiner les cas où les permutations sont impossibles.

Exemple : permutations possibles sur
"les soldats / percèrent / une brèche / dans la grande muraille"

(3) les accrochages : l'élève étant entraîné à isoler les groupes de mots on s'efforcera de les relier entre eux par des flèches qui représentent des relations dont on montrera la permanence sur de nombreux exemples. On mettra également en évidence le rôle de pivot joué par le verbe. Exemple :

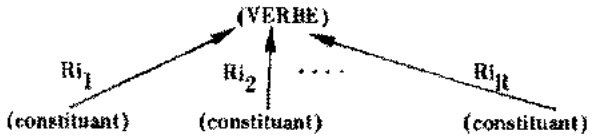
b) Parallèlement aux jeux du a) on peut imaginer un ensemble de manipulations liées à la créativité et conduisant à une réflexion sur le langage poétique et sa compréhension.

- 2 - Les structures

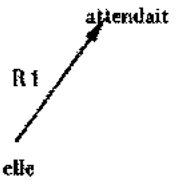
a) On suppose acquises certaines catégories fondamentales telles que verbe, nom, adjectif, adverbe. Ce principe se fonde sur la constatation qu'il s'agit ici de préciser le fonctionnement de la langue maternelle de l'élève et sur le fait que définir proprement ces termes nécessite un degré d'abstraction exclu ici. Il nous suffit d'ailleurs que l'élève puisse, par un certain nombre de critères facilement imaginables, classer un mot dans une catégorie : nous pouvons alors examiner le fonctionnement de ce mot.

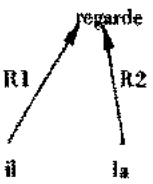
b) le groupe verbal peut être étudié du point de vue théorique dès que l'on a mis en évidence le rôle de pivot joué par le verbe et que l'on a pratiqué suffisamment le jeu des accrochages. Le système des pronoms du français nous permet de séparer les compléments "régis" des "circonstanciels" et de classer les régis. Par une démarche assez longue, mais simple (et qui a l'avantage de se fonder uniquement sur *la forme*) on aboutit aux concepts suivants : les mots ou groupes de mots liés au verbe seront des *constituants* ; on précisera le rôle joué par un constituant en nommant la relation qui le relie au verbe. Ces relations seront notées R_i (i = 1,2,3,4,5) ou CIRC(p), p indiquant la préposition du "circonstant".

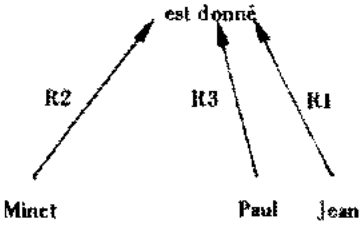
Si la relation CIRC n'intervient pas nous aurons une structure du type



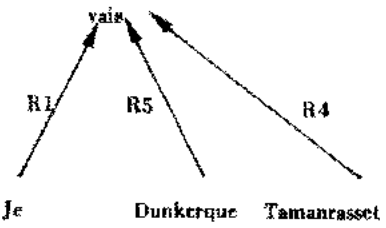
Exemples :







(minet est donné à Paul par Jean)

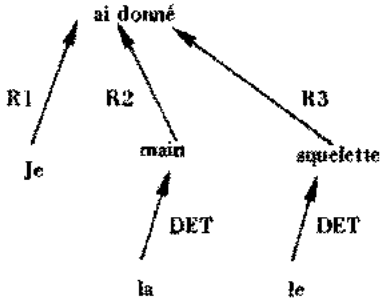


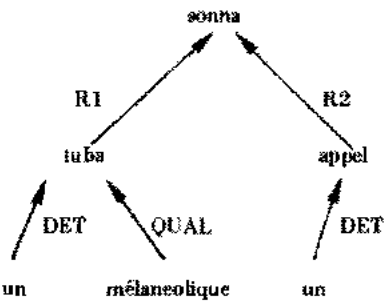
(je vais de Dunkerque à Tamanrasset)

c) le groupe nominal est une structure dont le pivot est un nom ; il peut être, en tant que constituant, relié au verbe par une relation Ri ou par CIRC.

Les constituants d'un groupe nominal sont reliés au nom par l'une des relations DET (articles...) QUAL (adjectif,...)

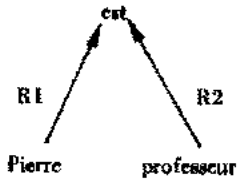
Exemples de groupes nominaux qui sont constituants d'un groupe verbal :



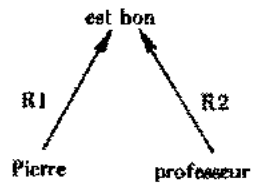


d) La phrase attributive

(1) "Pierre est professeur"



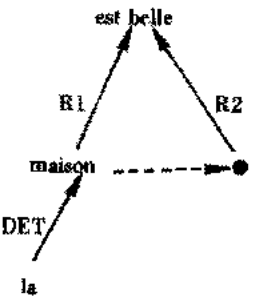
(2) "Pierre est un bon professeur"



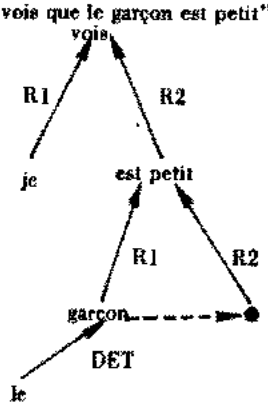
(Pierre est bon, en tant que professeur)

(3) "la maison est belle"

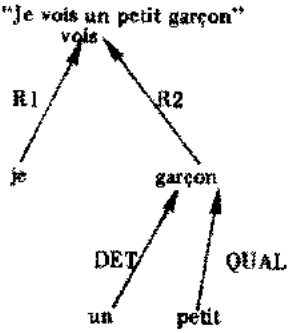
(la maison est belle, en tant que maison)



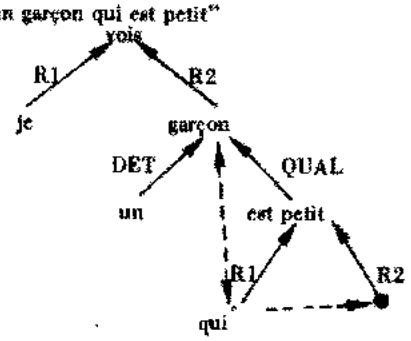
(4) "Je vois que le garçon est petit"



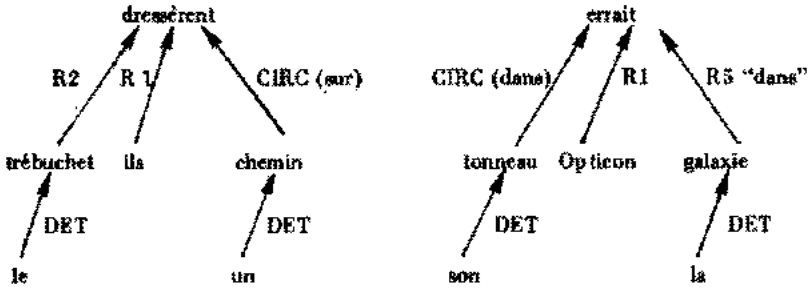
(5) "Je vois un petit garçon"



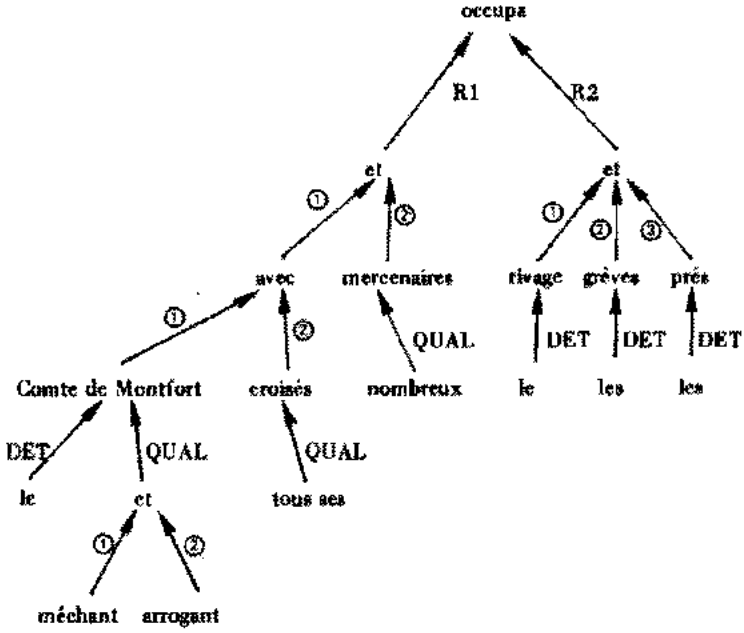
(6) "je vois un garçon qui est petit"



e) Le groupe verbal avec circonstants



f) La coordination



"Le Comte de Montfort, méchant et arrogant, avec tous ses croisés, et nombreux mercenaires, occupa le rivage, les grèves et les prés.

g) Remarque essentielle : Le groupe verbal peut comme le groupe nominal être lui-même un constituant.

III - Les modèles mathématiques utilisés

Nous faisons appel ici à deux modèles mathématiques classiques en linguistique pour la description syntaxique. Rappelons cependant que ces modèles ont un rôle descriptif, et doivent nous permettre d'expliquer le fonctionnement de la langue, notamment de la syntaxe. Nous ne donnerons pas une étude mathématique complète, mais simplement un tour d'horizon des théories auxquelles nous nous référons (pour plus d'information, voir par exemple "Notion sur les grammaires formelles" M. Gross et A. Lentin.)

III - 1 - *Notion de langage et de grammaire :*

Un mot est une suite de symboles $S_1\ S_2\ \ldots S_n$, sur un vocabulaire V, tel que $S_i \in V$. L'opération de construction est la concaténation. Soit un mot m et un mot m', le mot m"= mm' est construit par concaténation. Nous donnerons la définition suivante du mot :

1° tout symbole de V est un mot

2° si m et m' sont des mots, mm' est un mot.

L'opération de concaténation est non commutative, mais associative. On notera V^* (monoïde libre) l'ensemble de tous les mots construits sur le vocabulaire V. On appellera langage formel L toute partie de V^*.

III - 2 - *Grammaire hors-contexte (1) :*

On appellera grammaire hors-contexte le quadruplet (V, V_N, S, R) dans lequel V= vocabulaire (dit vocabulaire terminal), V_N vocabulaire auxiliaire (non terminal), $S \in V_N$ élément distingué ou axiome, et R une partie de $V_N \times (V \cup V_N)^*$. .

R est l'ensemble des règles. Une règle est notée
$A \to \varphi$, $A \in V_N$, $\varphi \in (V \cup V_N)$ mot sur $V \cup V_N$

III - 3 - *Langage accepté par une grammaire G :*

A une grammaire G, on associe un langage formel L_G de la façon suivante :

Soient deux mots μ et ν de $(V \cup V_N)^*$ et une grammaire G. Nous noterons $\mu \xrightarrow[G]{} \nu$ la relation de dérivation ainsi définie :

$\mu \xrightarrow[G]{} \nu$ si $\mu = X_1\ A\ X_2$, $\nu = X_1\ \varphi\ X_2$, et si $(A \to \varphi) \in R$.

Nous noterons $\mu \xrightarrow[G]{*} \nu$ la fermeture de la relation de dérivation. Le langage associé à G, $L_G = \{\varphi \mid S \xrightarrow[G]{*} \varphi\} \cap V^*$

Exemple pratique :

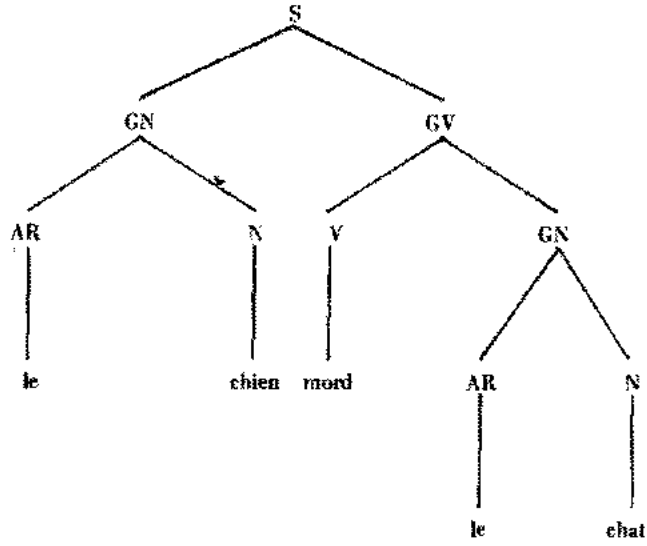
$V_N = \{N, V, GN, GV, AR, S\}$ $\quad V = \{\text{chien, chat, mord, le}\}$

et R
$S \to GN\ GV$
$GV \to V\ GN$
$GN \to AR\ N$

(1) Nous nous limitons ici à l'introduction de ce type de grammaires, et non à la présentation générale des "grammaires génératives".

N → chien
N → chat
AR → le
V → mord

Soit S ⇒ GN GV ⇒ GN V GN ⇒ AR N V GN ⇒ ARN V AR N ⇒ "le chien mord le chat" que l'on représente par le graphe de "dérivation"



Un tel graphe est appelé *structure de constituants*

III - 4 - *Rôle de la théorie :*

Les grammaires hors-contexte nous permettent de décrire effectivement des langages, et peuvent être utilisées ainsi de façon normative pour indiquer les constructions autorisées. Remarquons cependant qu'elles ne nous intéressent que lorsque la dérivation et les symboles du vocabulaire non terminal sont interprétables : ceci signifie que le graphe associé à la dérivation a une valeur explicative sur le fonctionnement de la langue. Le rôle de la théorie des langages se limite à cela, car elle ne peut rendre compte de tous les phénomènes et ne permet donc pas de décrire rigoureusement une langue naturelle. C'est pourquoi le langage formel n'est qu'un modèle très imparfait, purement formel (donc descriptif de la forme et non du contenu).

III - 5 - *Etude de la relation de dérivation :*

En pratique, notre étude ici portera plus sur le graphe de dérivation que sur les grammaires formelles. Celles-ci ne sont présentées que comme justification mathématique de cette écriture. Au niveau de l'enseignement, nous pourrons nous limiter à la description des graphes (ou structures syntaxiques). Nous interpréterons cette structure comme une relation définie sur l'ensemble O des occurrences de mots de la phrase, une occurrence étant un mot dans une position donnée, que nous pourrions définir par un couple (mot, rang dans la phrase) :

0 = { (le, 1), (chien, 2) , (mord, 3) , (le, 4) , (chat, 5)}

Chaque occurrence non terminale dénote alors une partie de 0 : la partie { le, chien } dénotée par GN, la partie { mord, le, chat } par GV, { le } par AR.

La relation est alors simplement une relation *d'inclusion*, ce qui est illustré par l'écriture parenthésée :

((le) (chien)) ((mord) ((le) (chat))))

Chaque partie est dénotée par un symbole non terminal, et l'on peut définir une injection "dénotation" de P (0) dans une partie de V_N.

Il existe une relation d'équivalence entre les parties dénotées par le même symbole : { le, chien } $\Leftrightarrow$ { le, chat } (groupe nominal)

III - 6 - *Propriétés de la structure :*

Revenons à la phrase elle-même, interprétée comme un ensemble muni de la relation : "suivre immédiatement" : Le → chien → mord → le → chat.

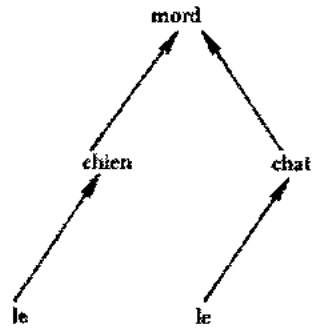
La famille de parties décrite par une structure syntaxique est telle que toute partie est connexe, selon la relation σ.

Ainsi la partie { le, mord } ne peut exister. Ceci se traduit par le fait que l'on peut décrire la structure par un parenthésage de la phrase. Nous dirons que la structure de constituants est continue.

III - 7 - *Structure de dépendance :*

Une autre famille de modèles fait appel à des structures d'un type différent (structures de "dépendances"). La structure est une relation binaire sur l'ensemble des occurrences. Chaque élément est en relation avec un autre élément au plus. Le graphe représentatif est encore une arborescence. Un seul sommet n'est en relation avec aucun autre (racine).

Exemple :



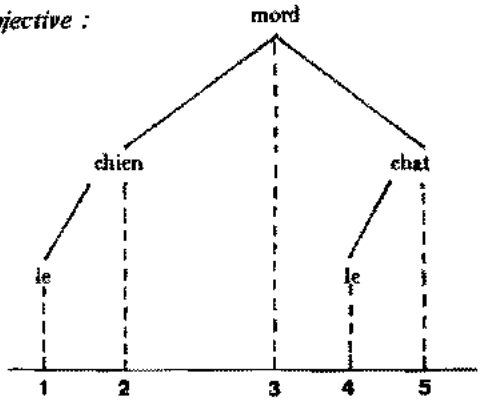
"mord" est racine de l'arborescence

On associe à chaque relation une étiquette qui la caractérise (sujet, objet... par exemple). Ici nous remplaçons les notations traditionnelles de sujet et d'objet par des numéros de relation (R1, R2, ...etc).

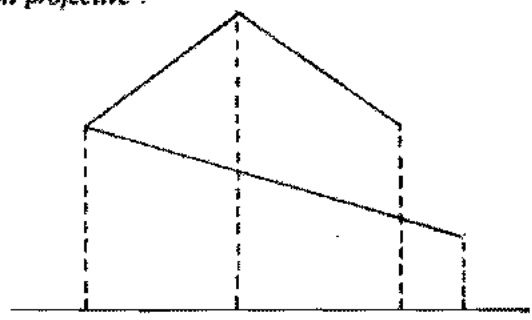
Cette structure est différente de la structure de constituants par sa nature. En fait, elle a un objectif moins formel que la structure de constituants, et cherche à décrire les "fonctions" (au sens linguistique) des mots. Comme dans le cas des structures de constituants, il existe une restriction fondamentale, liée à l'ordre séquentiel des mots.

Cette restriction s'exprime par la propriété de "projectivité" : si l'on décrit la chaîne sur un axe, les sommets de la structure de dépendance doivent pouvoir se projeter sur cet axe :

Structure projective :



Structure non projective :

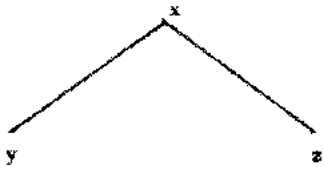


III - 8 - *Passage d'une structure à l'autre :*

Les deux types de description ne sont pas incompatibles, et nous serons amenés à présenter les deux aspects en effectuant la liaison suivante :

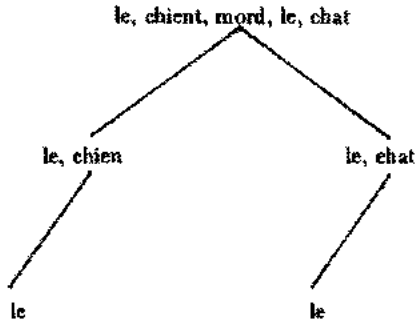
Tout sommet x d'un graphe arborescent est racine d'un sous-graphe arborescent, l'ensemble des sommets de ce sous-graphe est noté S_x.

Exemple :

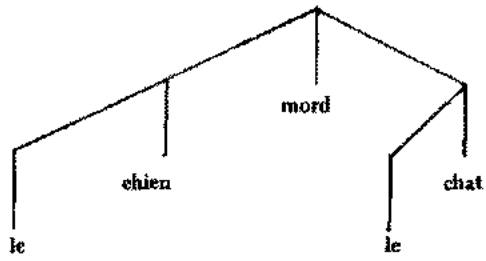


$S_x = \{x, y, z\}$

A toute arborescence (ensemble X de sommets), nous associerons une arborescence isomorphe, dont chaque sommet est une partie de l'ensemble X, de la façon suivante : à tout sommet $x \in X$ correspond S_X. La relation associée est la relation d'inclusion :



On en déduit facilement une structure de constituants, chaque sommet étant un sommet non-terminal.



On peut d'ailleurs vérifier que la condition de projectivité est équivalente à la condition de continuité. Ces deux aspects complémentaires peuvent être présentés directement en classe de Français, en mettant en évidence les classes de mots (verbe, nom...), et les fonctions syntaxiques (sujet, objet...).

III - 9 - *Etude des grammaires hors contexte :*

L'étude des grammaires hors contexte peut être poursuivie. Elles permettent de mettre en évidence les propriétés de "récursivité", et de décrire des phrases de longueur infinie. Cette propriété est mise en évidence par l'apparition du même symbole non terminal dans une dérivation.

Soit :

$$\begin{cases} S \rightarrow a\ S\ a \\ S \rightarrow r \end{cases}$$ qui construit le langage $a^n\ r\ a^n$

Soit encore :

$$\begin{cases} S \rightarrow a\ A \\ A \rightarrow S\ a \\ S \rightarrow r \end{cases}$$ qui construit le langage $a^n\ r\ a^n$

La récursivité peut apparaître d'un seul côté (droite ou gauche), comme dans :

$S \rightarrow S\ a$ qui construit le langage $r\ a^n$
$S \rightarrow r$

ou sous forme imbriquée (voir $a^n r\ a^n$).

L'on peut mettre en évidence de tels phénomènes en Français avec les relatives :

d'un seul côté : "l'homme qui a vu l'homme qui a vu l'homme ... etc"

imbriquées : "Le jardin (où le chou pousse) est bien clôturé"

"Le jardin (où le chou (que la chèvre mange) pousse) est bien clôturé"

"Le jardin (où le chou (que la chèvre (que le loup convoite) mange) pousse) est bien clôturé".

IV - Quelques problèmes posés par la coordination des enseignements

IV - 1 - *Relations d'équivalence et classes d'équivalence :*

Les classes d'équivalence apparaissent rapidement à plusieurs niveaux : d'une part, dans l'étude traditionnelle des différentes formes d'une unité. La conjugaison du verbe "être" nous définit une classe de mots que l'on représente par l'infinitif "être".

L'analyse distributionnelle met en évidence des mots ou groupes de mots interchangeables. On fait apparaître ainsi des classes d'équivalence.

Il semble de toutes façons que cette notion doive être traitée en plusieurs étapes :

1°- Montrer l'existence d'une relation d'équivalence, définie par "être substituable à" dans l'analyse distributionnelle.

2°- Faire apparaître la notion de classe d'équivalence, en manipulant les mots, et en montrant que l'on peut choisir un *représentant* de la classe.

3°- Nommer la classe, en introduisant la notion de vocabulaire "non terminal", sans faire forcément apparaître la grammaire générative.

Cependant, il semble que la manipulation de ces grammaires ne soit pas hors de portée, et que les élèves puissent y être initiés. De tels exercices sont très enrichissants du point de vue logique (récursivité), mais ne peuvent en aucun cas faire l'objet de développements mathématiques.

IV - 2 - *Etudes des structures :*

Les structures de dépendance peuvent être introduites directement comme primitives. L'étude mathématique est compliquée par l'apparition de noms de relation (R1, R2 ...). Une possibilité consiste à considérer qu'il y a non pas une seule relation mais autant de relations qu'il y a de noms. Il nous semble préférable de s'en tenir à une seule relation (relation de "dépendances").

La structure de constituants peut facilement s'expliquer comme relation d'inclusion de parties d'un ensemble.

Le passage de l'une à l'autre implique la manipulation d'ensembles structurés, objets difficiles à introduire. Nous éviterons d'en parler, tout au moins en 6ème et en 5ème.

IV - 3 - *Autres exemples :*

Etude de relations particulières :

Certaines propriétés des relations sont facilement analysées au niveau de la langue. Citons par exemple les classifications de formes pronominales, avec les pronoms réfléchis et réciproques :

"Je me lave", "Je te lave", "Nous nous lavons", "Nous nous lavons les uns les autres".

IV - 4 - *Etude de la logique :*

Nous ne ferons qu'évoquer cette interprétation, aussi riche que dangereuse. Elle concerne les articles, mais surtout les conjonctions de coordination (et, ou, ni ...) et la négation.

Nous avons laissé l'aspect logique de la langue, qui nous paraît prématuré en 6ème et en 5ème, et que l'on pourra surtout introduire en 4ème.

11 - Possibilités de coordination entre l'enseignement de la technologie et celui des mathématiques en 4e et 3e

Difficultés à vaincre, moyens d'action

par G.-H. CLOPEAU

I - Qu'est-ce que la technologie ?

Le programme de 4ème nous donne un aperçu de ce qu'on entend par technologie :

- mécanismes donnant des mouvements de translation
- initiation au dessin industriel
- mesures de dimensions
- mécanismes donnant des mouvements de précision
- introduction de la notion de force
- la balance.

II - Relation mathématiques-technologie

- La technologie offre un champ d'application aux mathématiques élaborées.

- D'autre part, elle fournit des situations mathématisables.

A - Pour illustrer le lien existant entre la technologie et les mathématiques, on peut prendre l'exemple de l'algèbre de Boole appliquée aux circuits électriques :

1°) A l'aide de circuits électriques, on découvre de nouvelles relations.

2°) On construit des circuits électriques à partir de relations.

N.B. La coordination entre technologie et mathématiques n'est pas toujours aussi simple, et présente, en particulier au niveau du langage, certains problèmes. Les mêmes mots sont employés, mais avec des sens différents (mais est-ce si grave ?). Ainsi, par exemple, le mot *fonction*.

A première vue, on peut étendre la notion de fonction mathématique à celle de fonction technologique.

éléments d'un ensemble de départ	fonction mathématique →	éléments d'un ensemble d'arrivée
ensemble de départ	fonction technologique (machine) →	ensemble d'arrivée

Cette extension n'est pas toujours très rigoureuse, ni même toujours possible.

On préfère parler de *fonction technique.*

B - Un exemple de l'aide que la technologie peut apporter au processus de mathématisation a ensuite été étudié :

. En technologie, les mouvements de *translation* sont une étude de trajectoires. On distingue les mouvements de translations rectilignes ou circulaires.

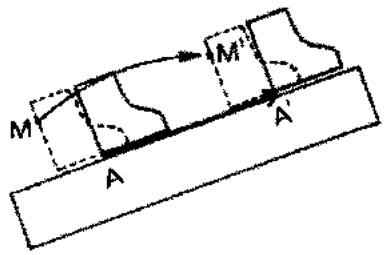
. En mathématiques, la translation est une bijection du plan sur lui-même.

Voyons si ces deux conceptions sont compatibles.

Prenons le cas du *pied à coulisse,* exemple d'un guidage en translation rectiligne.

Une observation superficielle laisserait croire qu'il s'agit réellement d'un mouvement de translation rectiligne. En fait on constate que ce mouvement n'est qu'approximatif. Un *"jeu fonctionnel"* en détruit la pûreté mathématique. Seules comptent en fait une position de départ du curseur (becs en contact) et une position d'arrivée (solide à mesurer entre les becs). Une maquette simplifiée fait mieux comprendre que, un bipoint particulier (qu'on appellera *"ordonnateur"* de la translation) étant donné, à tout point M du plan, on fait correspondre par la translation d'ordonnateur $\overrightarrow{AA'}$ un point M' du même plan.

On définit ainsi une *bijection* du plan sur lui-même. On retrouve la translation au sens mathématique.



III - Conclusion

* Le mathématicien raisonne sur des *modèles* parfaits dont le technicien fournit des *maquettes* sans jamais confondre réalité et modèle.

* L'élève est motivé pour effectuer des calculs qu'il rencontre en mathématiques du fait que les liens entre réalité et modèle seront ressentis.