

Ah, la recherche ! du temps perdu !

par François ROBERT

Ce qui m'intéresse ici, c'est d'essayer de comprendre ce qui se passe "dans la tête" du chercheur mathématicien au travail. Bien entendu, cette question n'intéresse pas le mathématicien en tant que tel : elle n'est pas de son domaine, donc elle n'a pas de sens. "C'est de la haute philosophie" dirait, avec l'accent du midi, et un geste du bras qui envoie tout par dessus bord, un mathématicien que je connais bien.

Néanmoins, ayant expérimenté et goûté le travail de gestation mathématique, j'ai toujours cherché à comprendre, à *posteriori*, ce qui se passait alors dans ma tête et qui peut se décrire ainsi, en bref : un cheminement parfaitement solitaire dans un univers parfaitement réel, doté de relief.

J'essaie de dire, de raconter, de rendre sensible l'espèce d'inconfort bienheureux dans lequel est aspiré le chercheur par une question ouverte qui l'inspire, qui lui ouvre l'appétit, bref, sur laquelle il sent qu'il va pouvoir agir.

On voudrait pouvoir exprimer ce qu'il y a de prenant dans cette faim, dans cette inconfortable situation, pourtant bienheureuse, de béatitude promise : j'ai faim d'une réalité cohérente que j'entraînerais, mais qui m'est voilée. Pour y accéder clairement, il faudra un effort de tout mon être : "mes petites cellules grises" vont se tendre à l'extrême. Sinon, si une part de moi-même reste au repos, si je ne monte pas dans la compréhension (démarche qui me mobilise entièrement), si je me déplace à l'horizontale, en sachant benoîtement où je vais, ça n'est pas sérieux : c'est un exercice, ou c'est de la recherche alimentaire.

Notre esprit est ainsi fait qu'il a besoin d'une réalité cohérente. L'effort qu'il s'impose pour parvenir à la contemplation de cette cohérence porte donc en lui-même sa propre justification : c'est une fascination.

A posteriori, je cherche à comprendre la force de cette fascination. Le chercheur qui trouve, lève le voile sur une réalité, sur une vérité qu'il est le premier (et au moment de la découverte, le seul) à avoir atteintes : ceci fait lever en lui d'étranges forces. Il a décortiqué une structure, démonté et compris un mécanisme. Il a, dans sa tête, libéré la lave liquide d'une nouvelle vérité. Il ne peut pas ne pas la faire connaître. Alors, le langage mathématique lui permet cette transmission.

Lorsque le chercheur rédige son travail, la lave, peu à peu, en prenant forme, se solidifie. Elle devient dure et froide, elle est fixée : c'est la publication, constat officiel de la découverte, rédigé dans le langage adéquat. Seul, ce document a valeur mathématique et peut intéresser la communauté. L'histoire de sa gestation reste l'affaire strictement personnelle de l'auteur. Seule trace de cette histoire, parfois, le très académique : "je remercie Monsieur Untel pour ses inappréciables suggestions".

Mais pour que le texte de notre chercheur devienne réalité pour ses éventuels lecteurs, il faudra qu'eux-mêmes, dans leur propre tête, et à leur façon, réchauffent cette lave solidifiée pour la remettre en fusion ; l'effort est semblable, quoique moins intense : le chemin est tracé, il suffit de le suivre.

Quelle est cette vérité, qui naît en fusion pour se solidifier ensuite dans le passé du chercheur dont l'"oeuvre" s'élabore ainsi, par couches successives ? Il faut qu'elle soit bien forte, pour qu'il consacre tant d'efforts à la servir. Et c'est d'ailleurs à quoi on reconnaît qu'il s'agit d'une vérité, car le désir d'exister en recherche n'est pas suffisant pour rendre compte de ce phénomène, de ce besoin (heureusement !)

Elle est bien forte cette vérité, et pourtant elle est bien pauvre : je contemple le théorème de Perron-Frobenius depuis pas mal d'années, c'est un phare, il me dit quelque chose, et pourtant, je ne me ferais pas couper le petit doigt pour lui. Et je sais bien pourquoi : cette vérité est minérale, c'est un désert, elle n'est pas porteuse de vie.

Mais il s'agit quand même de vérité, même si elle n'est que minérale. Et lorsqu'il s'agit de vérité, on accourt parce qu'on va enfin se mettre quelque chose sous la dent, même si c'est un peu sec : il y a puissance d'attraction. Comment peut-il se faire qu'un esprit au travail, c'est-à-dire au service de cette vérité, puisse la développer, l'étendre ?

Les chercheurs ne parlent jamais entre eux de ce qui se passe dans leur tête lorsqu'ils cherchent. Les plus matheux ne se posent même pas la question à eux-mêmes. Ce qui fait que je ne peux, au fond, que me référer à mon expérience personnelle de l'acte de recherche. Je ne sais pas si ce que j'essaie de décrire et de comprendre peut éveiller des résonances, provoquer une reconnaissance, un "oui, c'est comme cela" dans d'autres têtes de chercheurs : j'aimerais bien pouvoir lire d'autres descriptions que la mienne de l'acte de recherche ; je crois qu'on y trouverait des univers très éloignés les uns des autres.

Le problème et son mode de représentation

L'esprit du chercheur sans question à ruminer erre comme une âme en peine... et l'on sait bien que poser une vraie question sur laquelle une recherche pourra se développer, demande toute une élaboration : c'est faire déjà un bon bout du chemin. Et là, le formalisme, le langage, relégué tout à l'heure à un niveau inférieur, est absolument nécessaire ; comme dans toute marche d'approche, c'est un appui dans la pénombre ; pour démarrer, il me faut un crayon, du papier et un formalisme pour m'aider.

Il est clair qu'on ne peut pas poser un vrai problème gratuitement, indépendamment du reste de la connaissance : un système d'axiomes posés a priori laisse froid. Il me semble que le chercheur doit pouvoir se dire : "Si je connaissais la réponse, je disposerais d'un levier nouveau pour agir sur telle partie déjà existante de l'édifice ; ma compréhension de la réalité serait éclaircie..."

Je ne dis pas qu'un sujet de recherche n'est intéressant que dans la mesure où il a des "applications pratiques". Au contraire, je crois que le seul besoin de la cohérence justifie une recherche ; mieux, je crois que ce besoin de cohérence (nécessité consciente de mon esprit) est la seule justification de la recherche. Seulement, par cohérence, il faut entendre ici harmonie de ma construction par elle-même, donc aussi, évidemment, harmonie de cette construction avec le soubassement sur lequel je m'appuie : je ne peux construire "en l'air" ; pour démarrer, il me faut

une base de départ, fût-elle "abstraite" : pour moi elle est "concrète", tout dépend de mon niveau d'abstraction.

On voit souvent des mathématiciens appliqués (dont je suis !) prétendre ne partir que de problèmes "réels" (issus de la physique). C'est rarement le cas ; cela demande un très gros travail de décantation et de formalisation : sans nier du tout la nécessité physique et aussi la grande difficulté d'un tel travail, où la matière de départ est très engluée, il faut bien reconnaître qu'il est beaucoup plus agréable, et tentant, de partir d'une matière plus élaborée. De toutes façons, si seule telle application pratique était en vue, on ne se fatiguerait pas autant pour élaborer une structure générale cohérente. On peut dire ce que l'on veut, la démarche est toujours la même, qui va vers la cohérence, c'est-à-dire la compréhension.

Ce qu'il y a, par contre, de très étonnant, c'est qu'à postériori, cette connaissance cohérente puisse se traduire parfois par une action efficace sur la matière, même s'il s'agit alors d'un autre ordre, plus confus, plus opaque. Et inversement, fait qui est au moins aussi surprenant, c'est que "des nécessités d'ingénieur" soient bien souvent à l'origine de la découverte de morceaux entiers de la réalité mathématique, et des plus féconds, auxquels personne n'avait pensé jusque-là.

Ce sujet de recherche, le chercheur va devoir tout d'abord l'appréhender, le décanter, le travailler ; à coup sûr, le transformer, le simplifier, le rendre crucial. Pour le moment, restons-en à la phase de préhension. Comment un énoncé peut-il devenir pour le chercheur sa réalité quotidienne et susciter son effort constant ? Parce qu'il peut l'appréhender, le circonscrire, le retourner sur toutes ses faces. Parce qu'un relief apparaît. Il faut bien parler d'un mode de représentation interne.

Cette représentation interne existe, c'est bien certain, pour chaque chercheur. Sans elle, le formalisme reste à plat. Sans elle, pas de démarrage possible, pas de relief dans l'univers, pas de préhension, pas de reconnaissance du terrain et de la difficulté "à vaincre".

Cette représentation interne existe. Dire maintenant ce qu'elle est, comment elle s'élabore, se modifie en fonction des éléments qu'on vient d'établir, j'en suis incapable, même en ce qui me concerne : tout ce que je sais, c'est qu'elle existe et qu'elle évolue. On parle de deux grands modes de représentation interne ; le mode géométrique et le mode analytique. L'un et l'autre permettent de "voir en relief" la réalité mathématique. Le premier, le plus répandu, opère sur les êtres mathématiques "de nature géométrique" : la représentation qu'il donne est analogue à celle qu'on peut avoir d'une sphère, d'un cône et par exemple de leur intersection. Du second, je ne sais personnellement rien. Il permettrait de voir en relief les êtres de l'analyse mathématique et

son acquisition serait (Lichnérowicz) extrêmement laborieuse. Je me suis souvent demandé, devant telle démonstration à caractère analytique, qui pour moi restait à plat et n'expliquait rien, parce que je n'y voyais rien d'autre que le seul développement cohérent du langage, à partir de quelle représentation son auteur avait pu l'imaginer. Dire qu'il possédait un mode analytique de représentation résoud évidemment la question...

Ce que je sais, c'est qu'il m'est arrivé de communiquer, au niveau du mode de représentation, avec tel chercheur. Cette communication est rarement possible et demande une longue fréquentation. Lorsque cette communication existe, il n'est plus besoin de redescendre au niveau du langage mathématique : il y a compréhension à demi-mot et possibilité de recherche commune, encore qu'on reste à la périphérie du problème. Il s'agit plus exactement de la possibilité de faire ensemble le point de la situation, telle qu'elle se présente avec son relief. Il est alors assez étonnant de sentir chez l'interlocuteur les mêmes résonances qu'en soi-même. On repart ensuite chacun dans son coin pour essayer d'avancer. Le vrai travail est toujours solitaire, ce qui m'amène à examiner la question qui m'intrigue le plus.

Le mode de création

Le problème posé et son mode de représentation sont des choses statiques. Pour qu'il y ait progression dans la connaissance, pour que la représentation puisse être modifiée de façon à mieux cerner la réalité mathématique, il faut bien qu'il y ait quelque part un facteur de dynamisme. Par expérience, on sait que ce dynamisme existe. C'est quand même une chose incroyable que l'esprit soit capable de "faire du réel", de faire du plus, de créer. Ce qui pose évidemment la question de fond : cette activité est-elle réductible au seul jeu déterministe de mes neurones ? Je le croirai quand je verrai un automate inventer un théorème...

Un mot d'abord sur ce terme de création : le mathématicien sait bien — la réalité mathématique lui résiste assez pour cela ! — qu'il ne crée pas mais qu'il découvre. Il est persuadé, lorsqu'il cherche, que le mécanisme qu'il tend à démontrer existe indépendamment de lui. On dit des mathématiques qu'elles sont une construction cohérente ; c'est une expression ambiguë. L'architecte peut, à peu près, construire ce qu'il veut, il est le maître de son édifice. Le mathématicien sait bien qu'il n'est pas maître de son édifice. Il ne peut pas imposer la structure qu'il voudrait. J'ai beau me dire que ce serait quand même plus "simple" (!) si toute matrice était irréductible, rien à faire ! ...

Ce qui me sidère, c'est que toutes les "réalités possibles" imaginées par le mathématicien en recherche sont des aberrations contradictoires

tant qu'elles ne coïncident pas avec la réalité mathématique, qui, elle, ne peut jamais être prise en défaut. On aura beau me dire que ce dernier point est pourtant évident, en raison du principe sacré de la cohérence (*), je ne démords pas de ma stupéfaction : la cohérence de la réalité mathématique, je la constate, mon esprit est ainsi fait qu'il en a besoin, mais elle me paraît toujours être un beau cadeau !

Pour essayer de comprendre le mécanisme de la recherche, je pars de cette constatation : il est impossible de "se voir vraiment" faire de la recherche. Lorsque je cherche, si je me distrais moi-même dans mon effort de focalisation, en observant cet effort, "l'esprit s'en va", ma recherche devient creuse, je ne suis plus en recherche : je vois alors ma page où la réalité mathématique évanouie n'a laissé que des écritures formelles, à plat.

Il est donc impossible de chercher des mathématiques en se disant qu'on en cherche : autrement dit, dans la dynamique de la recherche, les facultés "secondaires" du chercheur sont entièrement mobilisées. Je pense qu'elles sont récupérées *au plan mathématique* pour le contrôle de sa propre démarche, et que c'est ce contrôle qui est facteur de dynamisme, qui permet une progression, un cheminement, et de mieux comprendre où l'on achoppe. Il est évidemment impossible alors de se dire, au même instant : "je fais des mathématiques". A ma connaissance le fait de chercher des mathématiques est la seule activité qui me "débarrasse" de la conscience que j'ai de ce que je fais.

Elle m'en débarrasse en la mobilisant, en la récupérant à son niveau, dans une action de contrôle. Cela me satisfait de constater que c'est cette activité de contrôle — facultés secondaires récupérées — qui est le germe de la création. Et cela explique, je crois, le fait que le mathématicien "génial", celui qu'on a envie d'appeler "une bête mathématique", soit finalement un être souvent assez inconscient, et de lui-même, et des autres. Ses facultés secondaires sont "en permanence" (ou presque) récupérées au plan mathématique : d'où cette "vision active" qu'il a constamment de la réalité mathématique, qui impressionne tant les mathématiciens ordinaires et qui peut même les écoeurer, devant tant de facilité, de devoir eux-mêmes fournir tant d'efforts ! (Ils essaient de se consoler en se disant que Science non consciente n'est que ruine de l'esprit...)

Finalement, je pense que le mécanisme de la recherche est le suivant : quand je cherche des mathématiques, ma "conscience primaire" agit, à tort et à travers (et c'est une nécessité) en proposant sans arrêt des possibilités pour avancer. Son rôle d'*imagination* des "réalités possibles" est donc essentiel. Ma "conscience secondaire" contrôle ces propositions, élimine le fatras aberrant, contrôle, élimine.

(*) Ce qui revient à dire que ce qui fonde la cohérence, c'est la cohérence...

Ce faisant, elle cerne de plus en plus près la question, et oriente alors la "fraîcheur naïve" de la conscience primaire vers des thèmes de plus en plus cruciaux. Lorsqu'elle manque de souplesse, la conscience primaire présente à nouveau au contrôle telle possibilité, déjà refusée : on tourne en rond.

Au bout d'une longue chaîne de rebondissements (et par quels chemins solitaires et à jamais inconnus des autres passons-nous !) il y a, parfois, une pépite qui reste dans le tamis. Souvent, dans le feu de l'action, il arrive que la conscience secondaire, vieux juge impassible, se soit quand même laissé "enthousiasmer" par la conscience primaire, jeune personne par nature peu réfléchie : alors la pépite est fautive, et le juge, lorsqu'il finit par s'en apercevoir, n'est pas très content : on le comprend. On comprend aussi que pour faire de la recherche il faut qu'existent et se répondent et la "fraîcheur naïve" et l'impassibilité du juge.

Je prends une image analogue, celle d'un grand-père partant avec son petit-fils à la cueillette, disons des champignons. L'enfant, c'est sa nature, a besoin de trotter dans les prés et de ramasser, enthousiaste, tout ce qu'il trouve. Il le rapporte au grand-père et repart. Ce dernier est avare de ses pas, il n'aime pas trop se baisser, mais il connaît les champignons. Il trie la cueillette de son petit-fils, jette ce qui n'est pas bon, et oriente l'enfant fureteur, en fonction de la situation présente, vers les coins où il sent "qu'il doit y en avoir".

Bien sûr, il ne s'agit là que d'images. Mais comment procéder autrement ?

En tous cas, il s'agit, à chaque fois, d'une véritable aventure intérieure. Et ce qui me stupéfiera toujours, je le disais plus haut, c'est que cette aventure, faite d'échecs répétés, est constamment à l'écoute d'une vérité sur laquelle elle finit par déboucher. Même si elle n'est que minérale, cette vérité est vraie, et elle est neuve : personnellement, je sais que je pourrais difficilement me passer de cette quête.

Il est clair que, pendant toute cette aventure, ma cigarette peut, sans me gêner, trouser la nappe de mon bureau. J'espère que ma femme va un peu mieux comprendre, y compris le fait que, lorsque l'acte de recherche cesse, pour cause de fatigue, la "rentrée dans l'atmosphère" qu'il faut effectuer lui offre le spectacle d'un mari "téléguidé". Telle un hérisson en boule, la conscience secondaire est lente à se dérouler...