COURRIER DES LECTEURS

L'énoncé 218 rebondit !

Un peu tard, mais mieux vaut tard que jamais, deux contre-exemples me sont parvenus pour l'énoncé 218, prouvant que deux groupes ayant le même nombre d'éléments de chaque ordre ne sont pas obligatoirement isomorphes. Le premier m'est envoyé par Marie-Nicole GRAS (Brésilley), et les deux par Gérard LAVAU (Dijon), l'auteur de l'énoncé, qui les tient de M.QUERCIA (Dijon).

Le premier est le groupe engendré par deux éléments s et r tels que : $s^2 = r^8 = 1$ et $sr = r^5s$. Ce groupe G_1 a 16 éléments : $(1, r, r^2, \ldots, r^7, s, sr, \ldots sr^7)$ et la relation $sr = r^5s$ se généralise en $\forall k, sr^k = r^{5k}s$, donc $(sr^k)^2 = r^{-2k}$ de sorte que, si $k \neq 0$, sr^k a le même ordre que r^k. Il y a donc un élément d'ordre 1, trois d'ordre 2, quatre d'ordre 4 et huit d'ordre 8, tout comme dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$, engendré lui par s et r tels que $s^2 = r^8 = 1$ et $sr = rs$, et qui n'est pas isomorphe à G_1, car il est commutatif alors que G_1 ne l'est pas.

G_1 peut être représenté comme un sous-groupe du groupe des permutations de 8 éléments $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, r étant la permutation circulaire notée $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ qui à 1 associe 2, à 2 associe 3, ... à 8 associe 1, et s la permutation qui échange 2 et 6 et échange 4 et 8, notée $(2, 6)\ (4, 8)$. Mais on peut aussi géométriquement, considérer les deux faces d'un prisme octogonal, s étant la symétrie plane qui transforme une face dans l'autre, et r la "rotation" qui fait tourner une face de $\pi/4$ et l'autre de $5\pi/4$. forme

Le second exemple est le groupe multiplicatif G_2 des matrices de la

$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où a, b et c appartiennent à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Il est clair que, pour toutes ces matrices

M, $(M - I)^3 = 0$; mais comme le corps des coefficients est de caractéristique 3, $(M - I)^3 = M^3 - I^3$, si bien que parmi les 27 matrices de G_2, l'identité est d'ordre 1 et les 26 autres d'ordre 3, tout comme dans le groupe additif $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^3$ qui n'est pas isomorphe à G_2, car il est commutatif alors que G_2 ne l'est pas. On notera que l'on aurait pu remplacer $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ par tout corps fini de caractéristique ≥ 3, et l'on aurait même pu généraliser à beaucoup d'autres groupes multiplicatifs de matrices triangulaires.

Ces deux exemples permettent de répondre négativement à deux des questions posées à propos de cet énoncé 218 :

Si deux groupes G et G' admettent des sous-groupes distingués H et H' isomorphes, avec G/H isomorphe à G'/H', et si en outre les ordres des éléments de G sont les mêmes que les ordres des éléments de G', G et G' ne sont pas nécessairement isomorphes, même dans le cas très particulier où G/H est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. En effet, G_1 possède trois sous-groupes distingués d'ordre 8, un isomorphe à $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ et deux isomorphes à $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, et il n'est pas isomorphe à $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ qui possède lui aussi quatre sous-groupes distingués isomorphes à $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$ ou à $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$; de même, G_2 possède quatre sous-groupes distingués isomorphes à $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$. Notons au passage qu'un sous-groupe H d'ordre k d'un groupe G d'ordre $2k$ est nécessairement distingué, car l'application qui, à tout élément de H associe 0 et à tout autre élément de G associe 1 est un morphisme de G dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, admettant H pour noyau, alors qu'il n'en va pas de même d'un sous-groupe H d'ordre k d'un groupe G d'ordre $3k$: le groupe symétrique S_3 possède des sous-groupes non distingués d'ordre 2.

Par ailleurs, la connaissance de l'ordre des éléments d'un groupe ne suffit pas à savoir si ce groupe est commutatif. Dans certains cas, il permet de prouver que le groupe est non-commutatif (exemple: un gronpe ayant des éléments d'ordre 2 et des éléments d'ordre 3 sans avoir des éléments d'ordre 6 est non-commutatif), dans d'autres cas, il permet de prouver que le groupe est commutatif (par exemple: un groupe ayant un nombre premier d'éléments est cyclique, donc commutatif), mais il arrive, comme l'attestent les groupes G_1 et G_2, qu'un groupe commutatif et un groupe non-commutatif aient le même nombre d'éléments de tous ordres.