SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 219 (François LO JACOMO, Paris)

Trouver le plus possible de fonctions f, de **R** dans **R** (ou resp. de **C** dans **C**) vérifiant pour tout réel (resp. complexe) x et tout entier $n > 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right).$$

SOLUTIONS proposées par Pierre SAMUEL (Bourg la Reine)

Il s'agit de trouver des fonctions f, de **R** dans **R** ou de **C** dans **C** qui, pour tout entier $n > 0$ et tout x, vérifient :

$$\mathrm{A}(n,x) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right)$$

En posant $x = nz$, $\mathrm{A}(n,x)$ équivaut à:

$$\mathrm{B}(n,z) \qquad f(nz) = f(z) + f\left(z + \frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(z + \frac{n-1}{n}\right).$$

Ces fonctions seront appelées "solutions".

1 - Quelques remarques algébriques simples.

a) Les solutions forment un espace vectoriel sur **R** (ou **C**).

b) On a $f(\frac{1}{2}) = 0$ (appliquer $\mathrm{B}(2,0)$).

c) Si f est un polynôme de terme dominant az^q ($a \neq 0$), les termes dominants des deux membres de $\mathrm{B}(n,z)$ sont an^qz^q et naz^q . L'égalité n'est possible que pour $q = 1$. Pour un tel polynôme $f(z) = az + b$, la condition $\mathrm{B}(n,z)$ équivaut à

$anz + b = naz + \frac{a}{n}\big(1 + 2 + \ldots + (n-1)\big) + nb$, c'est-à-dire à

$(1-n)\,b = \frac{a}{n} \times \frac{1}{2} n\,(n-1)$, ou encore $b = -\frac{1}{2} a$. *Les seules solutions polynômiales* sont donc de la forme $f(z) = a\left(z - \frac{1}{2}\right)$.

d) Un calcul analogue montre que les fonctions complexes de la forme $f(z) = az + b\bar{z} - \frac{1}{2}(a+b)$ sont aussi des solutions.

2 - Détermination des solutions continues différentiables

En faisant la différence de $A(n, z+1)$ et de $A(n,z)$, on obtient, pour tout entier $n>0$, $f(x+1) - f(x) = f\left(\frac{x+n}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right)$. En supposant f *continue*, on fait tendre n vers l'infini et on obtient $f(z+1) - f(z) = f(1) - f(0)$ pour tout z. Remplaçons f par la fonction g définie par $g(z) = f(z) - f\left(\frac{3}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)$ qui est aussi une solution par (1.c), de sorte que $g(z+1) - g(z)$ est encore une constante. Or celle-ci est nulle car $g\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (cf.1.b). Donc g est *périodique de période* 1.

Traitons directement le cas d'une solution périodique g définie sur $\mathbf{C}$. Pour $z = x + iy$ (x,y réels), posons $g(z) = G(x,y)$ et supposons G continûment différentiable. Alors $B(n,z)$ s'écrit:

$$(1)\qquad G(nx,ny) = G(x,y) + G\left(x + \frac{1}{n}, y\right) + \ldots + G\left(x + \frac{n-1}{n}, y\right).$$

D'où, en dérivant par rapport à x, et en divisant par n,

$$G'_x(nx,ny) = \frac{1}{n}\left(G'_x(x,y) + G'_x\left(x + \frac{1}{n}, y\right) + \ldots + G'_x\left(x + \frac{n-1}{n}, y\right)\right).$$

Si n tend vers l'infini, le second membre tend vers $\int_x^{x+1} G'_x(x+t,y)\,dt$ car G'_x est continue. Comme G est une primitive de G'_x, l'intégrale vaut $G(x+1,y) - G(x,y) = g(z+1) - g(z)$ et est nulle d'après la périodicité. Ainsi $G'_x(nx,ny)$ tend vers 0. Or on a le lemme suivant:

Lemme - Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue et périodique de période 1. Si, pour tout x réel, la suite $(h(nx))$ ($n \in \mathbf{N}$) tend vers 0, alors h est nulle.

Soit $\frac{p}{q}$ (p et q entiers et $q > 0$) un nombre rationnel quelconque. Prenons $x = \frac{1}{q}$ et faisons tendre n vers l'infini dans la progression arithmétique $p + \mathbf{N}q$. Alors $h\left(n.\frac{1}{q}\right) = h\left(\frac{p}{q}\right)$ est un nombre indépendant de n. Comme sa limite est nulle, il est nul. Ainsi h est nulle sur $\mathbf{Q}$ donc sur $\mathbf{R}$ par continuité.

> **Remarque** : Par changement linéaire de variable, la conclusion reste vraie pour une période quelconque. On aurait pu aussi utiliser le fait que, pour x irrationnel, l'ensemble des nx est dense modulo 1.

Le lemme montre que la restriction de G'_x à $\mathbf{R}$ est nulle. Ainsi la restriction de G à $\mathbf{R}$ est constante, donc *nulle* par (1.c).

Cela règle le cas des *solutions continûment dérivables définies sur* $\mathbf{R}$: ce sont les polynômes $f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Revenons aux fonctions définies sur C. En divisant par n la formule (1), on voit que $\frac{g(nz)}{n} = \frac{G(nx, ny)}{n}$ tend vers l'intégrale $\int_x^{x+1} G(t,y)\,dt$ qui, par périodicité, vaut $\int_0^1 G(t,y)\,dt$. Cette intégrale ne dépend que de y ; notons-la $c(y)$. Ainsi $\frac{g(nz)}{n}$ tend vers $c(y)$.

Soient alors p et q deux entiers positifs. Les limites des deux membres de $\frac{g(n.pz)}{n} = \frac{pg(np.z)}{np}$ sont respectivement $c(py)$ et $pc(y)$, d'où $c(py) = pc(y)$; de même, $c(y) = q.c\left(\frac{y}{q}\right)$ et $p.c(y) = q.c\left(\frac{py}{q}\right)$. Ainsi, $c(ry) = rc(y)$ pour tout nombre rationnel $r > 0$. Comme c est continue (en tant qu'intégrale d'une fonction $G(t,y)$ qui dépend continûment du paramètre y), on a $c(ay) = ac(y)$ pour tout a réel positif, d'où $c(a) = ac(1)$, de sorte que $c(y)$ est de la forme ky, k constante, pour $y \geq 0$. De même $c(y) = k'y$ pour $y \leq 0$. Comme $c(y) = \int_0^1 G(t,y)\,dt$ est dérivable, on en déduit $k' = k$ et $c(y) = ky$ pour tout y réel.

Or la fonction $z = xi + y \mapsto y$ est une solution, car elle vaut $\frac{1}{2}i(\bar{z} - z)$ (cf.1,d). Pour elle, $k = 1$. Par linéarité, on peut donc supposer $k = 0$.

Comme ci-dessus pour G'_x, on voit que $G'_y(nx,ny)$ tend vers $\int_0^1 G'_y(t,y)\,dt$. Par dérivation par rapport à y de l'égalité $ky = c(y) = \int_0^1 G(t,y)\,dt$, cette limite vaut $k = 0$. Donc $G'_y(nx,ny)$ tend vers 0 et le lemme montre que la restriction de G'_y à **R** est nulle.

On suppose alors que G'_y est dérivable par rapport à y et que sa dérivée G''_{yy} a son module borné par un nombre M>0 dans la bande $|y| \leq 1$; par périodicité, c'est vrai si G''_{yy} est continue. Dans la formule de Taylor

$$G(x,y) = G(x,0) + y\,G'_y(x,0) + R(x,y) = R(x,y)$$

le reste $R(x, y)$ a son module borné par $\frac{My^2}{2}$. D'où $|G(x,y)| \leq \frac{1}{2}My^2$ pour $|y| \leq 1$ et $x \in \mathbf{R}$. Soient u et v deux réels. Dans la formule $G(u,v) = \sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{u+k}{n}, \frac{v}{n}\right)$, les modules des termes du second membre sont, pour n assez grand, tous bornés par $\frac{Mv^2}{2n^2}$. On a donc $|G(u,v)| \leq \frac{Mv^2}{2n}$, d'où $G(u,v) = 0$ en faisant tendre n vers l'infini. D'où le théorème :

> ***Théorème :*** Les solutions sur C, $f(z) = F(x,y)$ $(z = x + iy)$, où F est deux fois continûment différentiable, sont toutes de la forme $f(z) = az + b\bar{z} - \frac{1}{2}(a+b)$.

En fait, seules l'existence et la continuité de F'_x, F'_y et F''_{yy} ont été utilisées.

3 - D'autres solutions, d'ordinaire très discontinues.

Soit E une partie de **R** ou de C, vérifiant la condition :

(S) Si $z \in$ **E**, $r \in \mathbb{Q}$ et si n est un entier >0, alors $z + r$ et nz sont dans E.

Alors, si $z \in$ E, toutes les variables figurant dans $B(n,z)$ sont dans E, de sorte qu'une vérification algébrique de $B(n,z)$ dans E suffit.

Donnons-nous alors une *partition* (finie ou infinie) de **R** en parties E_i vérifiant chacune (S), et pour chaque i, un nombre réel a_i. Alors la fonction f définie par $f(x) = a_i\left(x - \frac{1}{2}\right)$ pour $x \in E_i$ est une solution. Par exemple, on peut prendre $f(x) = 2x - 1$ pour x rationnel et $f(x) = 0$ pour x irrationnel.

Dans le cas des fonctions de **C** dans **C**, on se donne une partition de **C** en parties E_i vérifiant (S), et pour chaque i des nombres complexes a_i et b_i. Alors la fonction f définie par $f(z) = a_i z + b_i \bar{z} - \frac{1}{2}(a_i + b_i)$ pour $z \in E_i$ est une solution.

Exemples de telles partitions.

1) Considérons une suite croissante (finie ou transfinie) $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_i \subset \ldots$ de sous **Q**-espaces vectoriels de **R** ou **C** telle que $\mathbf{Q} \subset F_1$ et posons $E_1 = F_1$, $E_i = F_i - F_{i-1}$ (complémentaire) pour $i \geq 2$. Les E_i forment une partition et chacun vérifie (S) car

➡ $z \in E_i$ et $r \in \mathbf{Q}$ donnent $z + r \in F_i$; et $z + r \in F_{i-1}$ est impossible, car impliquant $z \in F_{i-1}$ $(i \geq 2)$.

➡ $z \in E_i$ et n entier >0 donnent $nz \in F_i$; et $nz \in F_{i-1}$ est impossible, car impliquant $z \in F_{i-1}$ $(n \neq 0)$.

2) En particulier, on peut prendre pour suite (F_i) une suite croissante de *sous-corps* de **R** ou **C**. Ainsi la fonction f définie par $f(z) = 6z - 3$ pour z rationnel, $f(z) = z + 5\bar{z} - 3$ pour z algébrique non rationnel, et $f(z) = \bar{z} - \frac{1}{2}$ pour x transcendant est une solution.

3) La partition : axe réel, demi-plan $y>0$, demi-plan $y<0$ de **C** (avec $z = x + iy$). Celle-ci peut donner lieu à des solutions continues non dérivables.

Remarque : Donnons-nous deux partitions (E_i) et (F_j) dont tous les termes vérifient (S) et, pour chacune, une solution f et g. Toute combinaison linéaire de f et g est une solution par (1.a)). Mais elle peut être construite à partir de la partition $(E_i \cap F_j)$ par le procédé ci-dessus.

AUTRES SOLUTIONS

Charles NOTARI (Montaut) suggère de chercher en outre parmi les fonctions trigonométriques en signalant que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\prod_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)\right) = 2\sin(n\theta)$ car si l'on applique l'identité:

$\forall z \in \mathbf{C}$, $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - e^{\frac{-2ki\pi}{n}}\right)$ à $z = e^{2i\theta}$, on obtient à gauche :

$z^n - 1 = 2i\sin(n\theta)\,e^{in\theta}$ et à droite : $z - e^{-\frac{2ki\pi}{n}} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{n}\right)}\left(2\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)\right)$

Malheureusement, la fonction $f(x) = \ln|2\sin(\pi x)|$ n'est pas définie sur $\mathbf{Z}$, et il n'est pas possible de la prolonger sur $\mathbf{Z}$ de sorte que notre relation soit satisfaite pour tout x réel. En effet, pour $x = 0$, il faudrait que l'on ait : $\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ donc $\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{n}\right) = 1$ alors que, d'après l'identité précédente, $\forall z \in \mathbf{C}$, $\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{-\frac{2ki\pi}{n}}\right) = \left(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1\right)$, ce qui donne

pour $z = 1$: $\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{n}\right) = n$ D'ailleurs, on n'a même pas $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$!

Je n'ai pas reçu d'autres réponses à cet énoncé, mais j'avais moi-même pensé à une fonction simple, celle qui a suggéré l'énoncé : la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$.
Effectivement, si $x \in [pn + q, pn + q + 1[$ ($p \in \mathbf{Z}$ et q entier : $0 \leq q < n$), $E\left(\frac{x+k}{n}\right)$ vaudra $p + 1$ pour les q valeurs de $k \geq n - q$ et vaudra p sinon.

On peut même varier sur ce thème, choisir six constantes complexes arbitraires $a_1, a_2, \ldots a_6$ et considérer la fonction g de $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par:

- si $y = 0$ et $x \geq 0$, $g(x+iy) = a_1\,E(x)$
- si $y > 0$ et $x \geq 0$, $g(x+iy) = a_2\,E(x)$
- si $y < 0$ et $x \geq 0$, $g(x+iy) = a_3E(x)$
- si $y = 0$ et $x < 0$, $g(x+iy) = a_4\,E(x)$
- si $y > 0$ et $x < 0$, $g(x+iy) = a_5E(x)$
- si $y < 0$ et $x < 0$, $g(x+iy) = a_6\,E(x)$

qui satisfait bien la relation.

On peut aussi faire appel à la fonction h de $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, définie par :

- si x entier ≥ 1, $\quad h(x+iy) = b_1$
- si x entier ≤ 0, $\quad h(x+iy) = b_2$
- si $x \notin \mathbb{Z}$ $\quad h(x+iy) = 0$

qui convient également, quelles que soient les constantes b_1 et b_2.

Peut-on en trouver d'autres qui ne se ramènent pas à celles de Pierre SAMUEL ou à celles-ci ?