ÉNONCÉ N° 220 (M.ROUSSELET, Herblay)

Soit ABC un triangle quelconque. Déterminer le plus grand triangle équilatéral inscrit dans le triangle ABC.

SYNTHÈSE DES SOLUTIONS REÇUES

Suscité par un simple exercice posé en atelier de recherche de Troisième (ABC étant un triangle quelconque, peut-on y inscrire un triangle équilatéral ?), cet énoncé a donné lieu à des développements multiples et intéressants qui je vais m'efforcer de résumer ici.

Edgard DELPLANCHE (Créteil) présente une étude savante de la famille des triangles équilatéraux IJK inscrits ou exinscrits dans le triangle ABC ($I \in (BC)$, $J \in (CA)$, $K \in (AB)$).

Cette même étude vaut pour toute famille de triangles IJK semblables à un triangle donné. Dans le cas des triangles équilatéraux, la démonstration de Charles NOTARI (Montant) s'en rapproche.

On remarque tout d'abord que les cercles circonscrits aux triangles AJK, BKI et CIJ se coupent en un point P (étudier les angles $\widehat{KPJ}$, $\widehat{IPK}$ et $\widehat{JPI}$), lequel est indépendant du triangle de la famille dans la mesure où les trois angles $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$ valent respectivement $\widehat{C}+\widehat{K}$, $\widehat{B}+\widehat{J}$ et $\widehat{A}+\widehat{I}$: il suffit d'étudier $\widehat{AJK}+\widehat{KIB}=\widehat{APB}$, etc... pour s'en convaincre. Si l'on appelle I_0, J_0 et K_0 les projections orthogonales de ce point pivot P sur (BC), (CA) et (AB) respectivement, $I_0J_0K_0$ appartient à la famille : les cercles circonscrits à AJ_0K_0, BK_0I_0 et CI_0J_0 ont même pour diamètres respectifs $[AP]$, $[BP]$ et $[CP]$. Le triangle $I_0J_0K_0$ est le plus petit triangle de la famille, les autres s'en déduisent par une similitude de centre P, d'angle φ et de rapport $\frac{1}{\cos\varphi}$. C'est donc pour φ maximum que l'on trouvera la solution de notre problème.

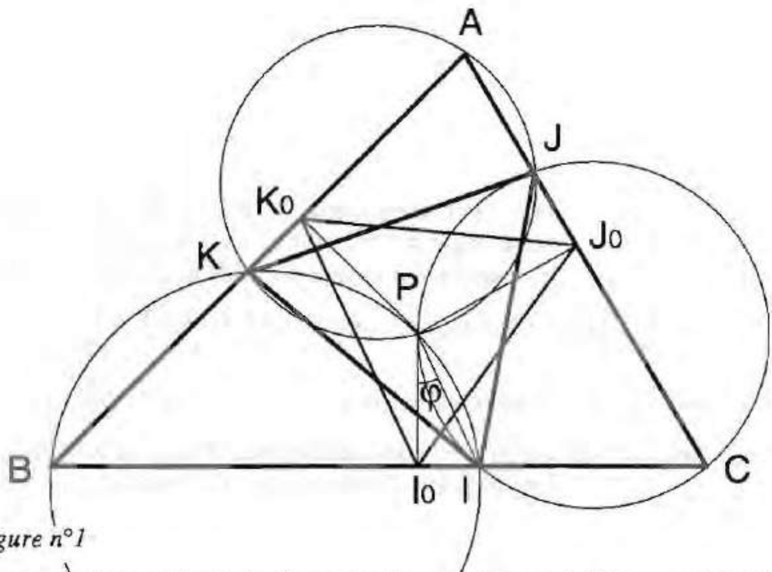


figure n°1

Cette première partie de la démonstration n'est pas spécifique aux triangles équilatéraux IJK, mais dans le cas particulier de la famille des triangles équilatéraux, on peut en dire plus : dans le cercle circonscrit à AJ_0K_0, dont $[AP]$ est un diamètre, $J_0K_0 = AP.\sin\widehat{A}$ et de même $K_0I_0 = BP.\sin\widehat{B}$, $I_0J_0 = CP.\sin\widehat{C}$, de sorte que si $I_0J_0K_0$ est équilatéral, $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{CA}{CB}$, P appartient donc au cercle d'Apollonius passant par C et les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{C}$. Par symétrie, P appartient aux trois cercles d'Apollonius, mais ces trois cercles d'Apollonius se coupent en deux points (ils sont orthogonaux au cercle circonscrit à ABC).

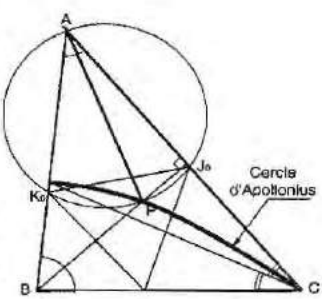


figure 2

René BENOIST (Palaiseau) et Michel BIGOT (Equeurdreville) s'efforcent, à partir d'un triangle équilatéral donné, d'en construire géométriquement un plus grand, alors que Marie-Laure CHAILLOUT opte délibérément pour le calcul trigonométrique. René MANZONI (Le Havre) détermine analytiquement K comme intersection de (AB) avec la transformée de (AC) par la rotation de centre I et d'angle $\pi/3$. Son étude débouche sur deux cas, incitant à se demander : le point pivot P de la démonstration d'Edgard DELPLANCHE peut-il être en I? Bien sûr! il suffit que $\widehat{A} = \frac{2\pi}{3}$ et que I soit le pied de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$. D'une part, parce qu'alors la rotation de centre I et d'angle $\pi/3$ transforme (AC) en (AB), donc tout point J de la droite (AC) en un point K de la droite (AB) tel que IJK soit équilatéral. D'autre part, parce que, comme $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$, $\frac{IB}{IA} = \frac{CB}{CA}$ et $\frac{IC}{IA} = \frac{BC}{BA}$, ce qui signifie que I appartient aux trois cercles d'Apollonius.

Je m'attarderai davantage sur la démonstration de Raymond RAYNAUD (Digne), qui met en avant trois idées intéressantes. La première, c'est qu'il est possible de retourner le problème en recherchant non pas le plus grand triangle équilatéral IJK inscrit dans ABC, mais le plus petit triangle semblable à ABC circonscrit à un triangle équilatéral donné IJK. La seconde, c'est que si l'on admet que $I \in [BC]$, $J \in [CA]$ et $K \in [AB]$, un tel triangle peut être explicitement construit à l'aide des arcs capables, l'un de centre a qui voit $[JK]$ sous l'angle $\widehat{A}$, un autre de centre b qui voit $[KI]$ sous l'angle $\widehat{B}$ et un troisième de centre c voyant $[IJ]$ sous l'angle $\widehat{C}$. Une droite quelconque ou presque passant par K coupera deux de ces arcs capables en A et B. (AJ) et (BI) se couperont en C, qui appartient au troisième arc capable puisqu'il voit $[IJ]$ sous l'angle $\widehat{C}$. Ces arcs capables sont d'ailleurs les cercles circonscrits à AJK, BKI et CIJ de la démonstration d'Edgard DELPLANCHE.

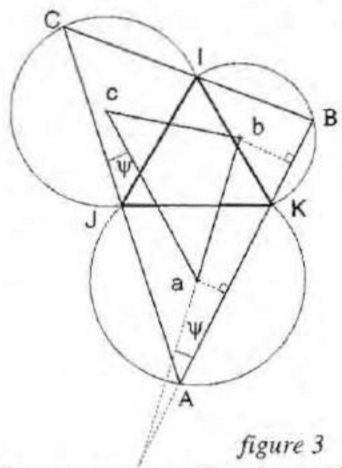


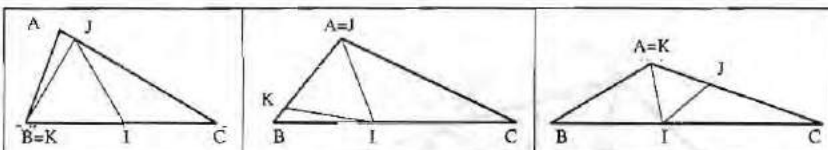
figure 3

La troisième idée, c'est que a et b étant les centres des arcs capables contenant A et B, la projection orthogonale de a sur $[AK]$ (donc sur $[AB]$) est le milieu de $[AK]$, et la projection orthogonale de b sur $[BK]$ (donc sur $[AB]$)

est le milieu de $[BK]$, si bien que $AB = 2ab \cos \psi$, ψ étant l'angle que fait (AB) avec (ab). Il en résulte que c'est pour ψ maximum qu'on trouvera la solution de notre problème, alors que $\psi = 0$ ((AB) parallèle à (ab)) nous donne le plus grand triangle semblable à ABC circonscrit au triangle IJK donné. A noter que le fait que IJK soit équilatéral ne joue aucun rôle dans la démonstration, et que, par ailleurs, le triangle abc est nécessairement semblable à ABC.

Cette démonstration peut être utilisée pour trouver le plus grand triangle équilatéral circonscrit à un triangle ABC donné. Les centres des arcs capables voyant $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ sous un angle $\pi/3$ sont les points C', A' et B' tels que les triangles $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$ soient isocèles avec $\widehat{C'} = \widehat{B'} = \widehat{A'} = \frac{2\pi}{3}$. On reconnaît là une situation classique où l'on démontre que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral. Le plus grand triangle équilatéral circonscrit à ABC a ses côtés parallèles à ceux de $A'B'C'$: si T est l'intersection des trois cercles contenant les arcs capables (T est le point de Toricelli du triangle ABC où l'on voit les trois côtés sous l'angle $2\pi/3$ ou $-\pi/3$), l'homothétie de centre T et de rapport 2 transforme $A'B'C'$ en $A''B''C''$, solution de notre problème: $[A''B'']$est bien parallèle à $[A'B']$ et de longueur double et il passe par C car $[TA'']$ et $[TB'']$ étant des diamètres de leurs cercles respectifs, $\widehat{TCA''}$ et $\widehat{TCB''}$ sont des angles droits. Le même résultat pouvait être atteint par la méthode d'Edgard DELPLANCHE sous réserve de retourner le problème (chercher le plus petit triangle semblable à ABC inscrit dans le triangle $A''B''C''$ donné), et Charles NOTARI nous informe qu'il a été obtenu par FASHBENDER en 1846.

Toutes ces méthodes conduisent au même résultat: le plus grand triangle équilatéral IJK tel que $I \in [BC]$, $J \in [CA]$ et $K \in [AB]$ a un sommet confondu avec un sommet du triangle ABC, et deux sommets appartenant à un même côté de ABC. Suivant les cas, on obtient :*(figure 4)*



Si	Si	Si
$\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \pi/3 \geq \widehat{C}$	$2\pi/3 \geq \widehat{A} \geq \pi/3 \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$	$\widehat{A} \geq 2\pi/3 \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$

Mais la question que l'on peut raisonnablement ou déraisonnablement se poser, c'est : pourquoi faut-il se limiter aux triangles équilatéraux ayant un sommet sur $[BC]$, un sur $[CA]$ et un sur $[AB]$? Peut-être est-ce la définition d'un triangle inscrit dans un autre, mais alors, n'existe-t-il pas d'autres triangles équilatéraux plus grands que ceux de la figure 4 n'ayant aucun sommet à l'extérieur de ABC, et quel est le plus grand d'entre eux ?

La question a été envisagée sous cet angle par Charles NOTARI et Marguerite PONCHAUX (Lille), et le raisonnement ci-dessous est très proche de la démonstration de Marguerite PONCHAUX.

Considérons un triangle équilatéral IJK n'ayant aucun sommet à l'extérieur de ABC. S'il ne touche aucun côté, il existe une homothétie de centre I et de rapport strictement supérieur à 1 qui le transforme en un triangle touchant au moins un côté (en J ou en K). S'il ne touche qu'un seul côté, par exemple en J ou bien en J et K, il existe une homothétie de centre J et de rapport strictement supérieur à 1 qui le transforme en un triangle plus grand touchant au moins deux côtés (le deuxième en I ou en K). Et s'il touche deux côtés distincts, par exemple $[AB]$ et $[AC]$, il existe une homothétie de centre A et de rapport supérieur à 1 qui le transforme en un triangle touchant les trois côtés.

De sorte que le plus grand triangle équilatéral n'ayant aucun sommet extérieur à ABC touche obligatoirement les trois côtés du triangle ABC. Mais cela ne signifie aucunement qu'il a un sommet sur $[BC]$, un sur $[CA]$ et un sur $[AB]$: il peut avoir un sommet confondu avec A, B ou C et toucher le côté opposé. Et c'est même exclusivement parmi ces derniers triangles qu'il faut rechercher la solution de notre problème.

Supposons en effet qu'un triangle IJK équilatéral vérifie : $I \in]BC[$, $J \in]CA[$ et $K \in]AB[$, et supposons que l'angle $\widehat{A}$ soit le plus grand des trois (au sens large), ce qui entraîne que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont strictement inférieurs à $\pi/2$, la droite

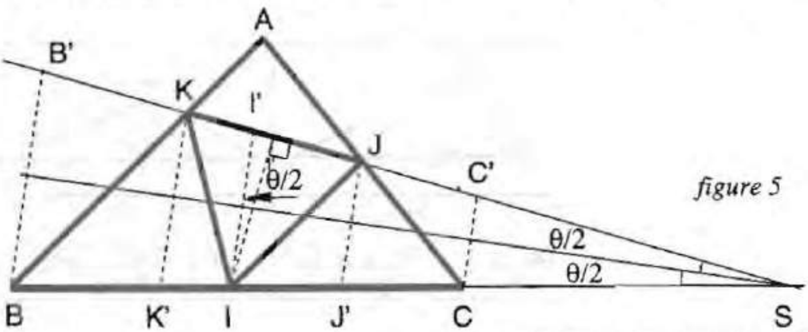


figure 5

(KJ) fait avec la droite *(BC)*, qu'elle coupe en S, un angle θ. S est extérieur au triangle ABC, on peut le supposer à droite de C (le cas : $\theta = 0$ et S à l'infini ne posant pas de problème particulier). $\theta < \pi/3$, car $\widehat{JSI} + \widehat{SIJ} = \widehat{KJI} = \pi/3$. La symétrie par rapport à la bissectrice de $\widehat{S}$ transforme C en C' et B en B' : C' est extérieur à ABC, car $\widehat{SCC'} \leq \pi/2 < \widehat{SCA}$ et B' également, car

$$\widehat{BKJ} > \widehat{BAJ} \geq \widehat{CBA} \Rightarrow \widehat{SBA} < \widehat{SBB'} = \frac{1}{2}\left(\widehat{SBA} + \widehat{BKS}\right).$$

Donc cette symétrie transforme K et J, qui appartiennent à $]B'C'[$, en K' et J' appartenant à $]BC[$. Et elle transforme I en $I' \in\ ]KJ[$, car la droite *(II')* fait avec l'axe du triangle équilatéral passant par I un angle $\theta/2 < \pi/6$.
Elle transforme donc le triangle équilatéral IJK en un triangle équilatéral isométrique $I'J'K'$ dont aucun sommet n'est extérieur à ABC, et qui n'est pas de taille maximale, car il ne touche qu'un seul côté du triangle.

Si, maintenant, l'un des sommets J ou K est en A, et que $I \in [BC]$, on doit avoir $\widehat{A} \geq \frac{\pi}{3}$, mais on ne suppose plus que $\widehat{A}$ est le plus grand des trois angles. Plaçons un repère orthonormé de sorte que B et C appartiennent à $\overrightarrow{Ox}$ et A à $\overrightarrow{Oy}$, d'ordonnée 1. La distance de A à un point I de $[BC]$, d'abscisse x, est une fonction convexe $\sqrt{1 + x^2}$ de x. Elle n'atteint donc son maximum qu'en l'une des extrémités de l'intervalle où peut se trouver I, et ces extrémités sont atteintes lorsque celui des points J ou K qui n'est pas confondu avec A touche lui aussi un côté, $[AB]$, $[AC]$ ou $[BC]$. En d'autres termes, le triangle solution a obligatoirement deux sommets sur un même côté de ABC, et un sommet confondu avec A, B ou C, et il touche les trois côtés de ABC. Combien existe-t-il de tels triangles ? Trois ! Un ayant deux sommets sur $[AB]$, un autre ayant deux sommets sur $[BC]$ et un troisième ayant deux sommets sur $[CA]$. C'est seulement dans le cas trivial où ABC est équilatéral qu'ils sont tous trois confondus, mais deux d'entre eux sont confondus dès lors que l'un des angles de ABC vaut $\pi/3$. Parmi ces trois triangles, il y a la solution proposée par la majorité des lecteurs (*figure 4*), qui en outre a un sommet sur $[AB]$, un sur $[BC]$ et un sur $[CA]$, mais ce n'est pas toujours le plus grand des trois : si $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \frac{\pi}{3} > \widehat{C} > \widehat{A} - \frac{\pi}{3}$ le plus grand a pour côté

$[AB]$, et si $\widehat{A} > \dfrac{\pi}{3} > \widehat{B} \geq \widehat{C}$, le plus grand a deux sommets sur $]BC[$.

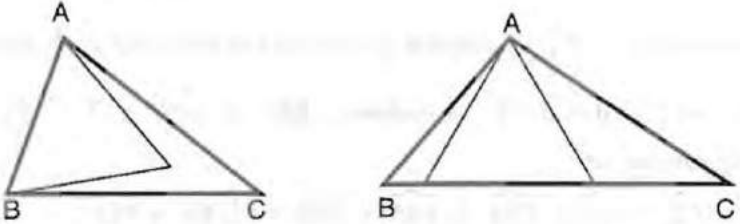


Figure 6