SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 244 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles)

Quelle relation lie les polynômes de la variable complexe :

$$\sum_{p=1}^{n} 2^p \frac{n}{p} C_{n+p-1}^{n-p} (z-1)^p \quad \text{et } (z^n - 1)\ ?$$

SOLUTION de R. JEANNIN (54 - Longwy)

On va montrer que les racines du polynôme de degré n

$$P_n(z) = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p} \binom{n+p-1}{n-p} (2z-2)^p, \quad n \geqslant 1,$$

sont les parties réelles des racines du polynôme $z^n - 1$. Plus précisément, $\omega_k = \cos \dfrac{2k\pi}{n}$ est racine double de P_n si $|\omega_k| < 1$ et racine simple si $|\omega_k| = 1$.

On aura par exemple : $P_4(z) = 16z^2 (z-1)(z+1)$ (car il est clair que le coefficient dominant de P_n est 2^n).

Il s'agira essentiellement de démontrer que

$$P_n(z) = 2T_n(z) - 2,\ n \geqslant 1 \qquad (2)$$

avec $T_n(z)$ le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev de première espèce défini par

$$T_0 = 1,\ T_1 = z \text{ et } T_n = 2zT_{n-1} - T_{n-2}, \quad n \geqslant 2 \qquad (3).$$

Rappelons que pour z réel, $|z| \leqslant 1$, on a $T_n(z) = \cos(n \operatorname{Arccos} z)$. La démonstration se décompose en plusieurs lemmes. On utilisera la notation $\dbinom{a}{b} = \dfrac{a(a-1)\ldots(a-b+1)}{b\,!}$, avec $b \geqslant 1$. On a $\dbinom{a}{b} = 0$ si $b > a$.

Lemme 1 : $\dfrac{n}{p}\dbinom{n+p-1}{n-p} = \dbinom{n+p}{2p} + \dbinom{n+p-1}{2p}$, $n \geqslant p \geqslant 1$.

Preuve :

$$\binom{n+p}{2p} + \binom{n+p-1}{2p} = \frac{(n+p)\ldots(n-p+1) + (n+p-1)\ldots(n-p)}{2p\,!}$$

$$= \frac{(n+p-1)\ldots(n-p+1)\left[(n+p)+(n-p)\right]}{2p\,!}$$

$$= \frac{n}{p}\binom{n+p-1}{2p-1} = \frac{n}{p}\binom{n+p-1}{n-p}.$$

Ce lemme montre, au passage, que P_n est à coefficients entiers.

Lemme 2 : Le polynôme $\Phi_n(z) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n+p}{2p} z^p$

satisfait la relation de récurrence :

$$\Phi_n = (z+2)\,\Phi_{n-1} - \Phi_{n-2},\ n \geqslant 2. \quad (4)$$

Preuve : calculons le coefficient a_p de z^p dans le membre de droite. Il s'agit de montrer que $a_p = \binom{n+p}{2p}$. Il est clair que le terme constant et le coefficient dominant de Φ_n sont égaux à 1 pour tout n ; on en déduit facilement que $a_0 = a_n = 1$. Par ailleurs, pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on a :

$$a_p = \binom{n+p-2}{2p-2} + 2\binom{n+p-1}{2p} - \binom{n+p-2}{2p}$$

$$= \binom{n+p-2}{2p-2} + \binom{n+p-1}{2p} + \binom{n+p-2}{2p-1}$$

$$= \binom{n+p-1}{2p-1} + \binom{n+p-1}{2p} = \binom{n+p}{2p}$$

Par linéarité, il est clair que le polynôme $Q_n = \Phi_n + \Phi_{n-1}$, $n \geqslant 1$, satisfait la récurrence (4), et le lemme 1 montre que :

$$Q_n(z) = 2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p}\binom{n+p-1}{n-p} z^p .$$

On en déduit que : $Q_n(2z-2) = 2 + P_n(z)$ (5)

Lemme 3 : En posant $R_n(z) = Q_n(2z-2)$, on a $R_n(z) = 2T_n(z)$.

Preuve : Comme $Q_n(z)$ satisfait la récurrence (4), il est clair que $R_n(z) = Q_n(2z-2)$ satisfait à la récurrence (3) des polynômes de Tchebychev. Un calcul facile permet de vérifier que $R_1(z) = 2z = 2T_1(z)$ et que $R_2(z) = 4z^2 - 2 = 2T_2(z)$, ce qui achève la démonstration.

Le lemme 3 et (5) montrent que : $P_n(z) = 2T_n(z) - 2$. Le nombre z est racine de P_n si et seulement si $T_n(z) = 1$. Pour z réel, $|z| \leqslant 1$, ceci équivaut à $\cos(n \arccos z) = 1$ d'où les $(n/2) + 1$ racines réelles :

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n/2.$$

Par ailleurs, pour $|z| < 1$, on a $P_n(z) = 2T_n(z) - 2 = 2\cos(n \arccos z) - 2$

et $$P'_n(z) = \frac{2 \sin(n \arccos z)}{\sqrt{1 - z^2}},$$

donc $P'_n(\omega_k) = 0$, pour $|\omega_k| < 1$ et ω_k est racine double dans ce cas.

En résumé, si $n = 2m$, P_n admet deux racines simples ± 1 et $m - 1$ racines doubles $\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}$ et si $n = 2m + 1$, $_n$ admet une racine simple et m racines doubles $\omega_1, \ldots, \omega_m$.

AUTRES SOLUTIONS

René MANZONI (Le Havre), l'auteur et une solution fausse.

REMARQUE

"La question était assez ouverte" écrit R. André JEANNIN. René MANZONI exprime le résultat sous la forme :

$$\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)^n + \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^n = 2 + P_n(z)$$

et Marie Laure CHAILLOUT : $z \neq 0 \Rightarrow (z_n - 1)^2 = z^n P_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$.