

ÉNONCÉ 3

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels vérifiant les conditions suivantes :

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$$

$$|x_i| \leq (n+1)/2 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Montrer qu'il existe une permutation $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que :

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq (n+1)/2.$$

SOLUTION

Appelons Y l'application qui à toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ associe :

$$Y(\sigma) = x_{\sigma(1)} + 2x_{\sigma(2)} + \dots + nx_{\sigma(n)}$$

et τ la permutation qui à tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, associe $n+1-k$.

Pour toute permutation σ , on a :

$$\begin{aligned} Y(\sigma) + Y(\sigma \circ \tau) &= (x_{\sigma(1)} + 2x_{\sigma(2)} + \dots + nx_{\sigma(n)}) + (x_{\sigma(n)} + \dots + x_{\sigma(1)}) \\ &= (n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \in \{-(n+1), (n+1)\}. \end{aligned}$$

Donc, soit l'une au moins des deux valeurs $Y(\sigma)$ ou $Y(\sigma \circ \tau)$ appartient au segment $[-(n+1)/2, (n+1)/2]$ et notre problème est résolu, soit ces valeurs sont situées de part et d'autre dudit segment. On peut donc supposer désormais que Y prend des valeurs strictement supérieures à $(n+1)/2$ et des valeurs strictement inférieures à $-(n+1)/2$.

Pour toute permutation σ ne vérifiant pas $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$, il existe une permutation σ' telle que : $Y(\sigma) - (n+1) \leq Y(\sigma') < Y(\sigma)$. En effet, pour au moins une valeur de k , on a : $x_{\sigma(k)} < x_{\sigma(k+1)}$. Si l'on appelle ε_k la permutation qui échange k et $k+1$, en laissant invariants les autres entiers, $Y(\sigma \circ \varepsilon_k) = Y(\sigma) + (x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k+1)})$, et comme tous les $|x_i|$ sont inférieurs ou égaux à $|(n+1)/2|$, on a bien : $-(n+1) \leq x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k+1)} < 0$.

Si les x_i ne sont pas tous distincts, il existe plusieurs permutations σ vérifiant : $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$, mais le n -uplet de valeurs $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, lui, est unique et le $Y(\sigma)$ correspondant également : c'est la valeur minimale prise par Y , car aucune autre valeur ne peut être minimale, elle est donc inférieure à $-(n+1)/2$.

Parmi les permutations σ telles que $Y(\sigma) > (n+1)/2$, il en existe au moins une, μ , telle que $Y(\mu)$ soit la plus petite valeur strictement supérieure à $(n+1)/2$ prise par Y . Je peux donc trouver une permutation μ' telle que :

$$Y(\mu) - (n+1) \leq Y(\mu') < Y(\mu).$$

Etant donné la définition de μ , on a obligatoirement :

$$-(n+1)/2 < Y(\mu') \leq (n+1)/2$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUES

Si l'inégalité $|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq (n+1)/2$ ne peut évidemment pas être améliorée, il suffit de choisir tous les x_i égaux à $1/n$ pour s'en convaincre, ce sont les hypothèses qui intriguent.

La première d'abord : puisqu'on ne change rien au problème en remplaçant tous les x_i par $-x_i$, pourquoi cette valeur absolue ? Ou plutôt, pourquoi cette égalité puisqu'on ne change rien à la démonstration en la remplaçant par une inégalité large ?

D'ailleurs, si $n = 4k + 2$ et si la moitié des x_i vaut $-a$, l'autre moitié valant a , comme $1 + 2 + \dots + n = (2k+1)(4k+1)$ est impair, $|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n|$ est un multiple impair de a , et pour qu'il soit inférieur ou égal à $(n+1)/2$, il faut que a , donc $|x_i|$, soit lui aussi inférieur ou égal à $(n+1)/2$. Mais dans ce cas, la somme des x_i est nulle : si la somme des x_i est vraiment égale à 1, l'hypothèse $|x_i| \leq (n+1)/2$ peut sans doute être affaiblie. Par exemple, si $n = 2$ et si $x_1 + x_2 = 1$, il suffit donc que le plus petit des x_i soit compris entre $-5/2$ et $1/2$ (donc que $|x_i| \leq 5/2$) pour que l'une des combinaisons $y_1 + 2y_2$ appartienne à $[-3/2, 3/2]$.

C'est cette seconde hypothèse qui constitue la principale énigme du problème, et si l'on ne parvient pas à bien l'interpréter, il est facile de s'aventurer sur des voies sans issues. En définitive, c'est à partir de l'information : $|x_i - x_j| \leq (n+1)$ qu'il va falloir prouver que $|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n|$ prend des valeurs proches de zéro. Car sans ce point de départ, s'il est facile de trouver les permutations pour lesquelles la fonction Y est maximale ou minimale, celles qui la rendent voisine de zéro devront placer les valeurs extrêmes du n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ "au centre", les valeurs moyennes aux extrémités, ce qui est impossible à formaliser.

Le pas à franchir, c'est de bien voir qu'on est en présence d'une étude de fonction, et que, comme pour le théorème de la valeur intermédiaire, il n'est pas nécessaire de chercher en quel point (pour quelle permutation) cette fonction Y s'approche le plus de zéro pour prouver qu'elle s'en approche suffisamment, il suffit d'étudier ses variations. Dans un certain sens, ce problè-

me s'apparente à l'énoncé 6 de l'an passé, mais à la différence des exercices scolaires, chaque énoncé d'Olympiade est particulier et l'on n'a pas fini de se laisser surprendre par de tels problèmes...même si certains y reconnaissent d'emblée des éléments connus !

J'ai reçu des solutions de Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles) et Oubinoöl OMARJEE (75 - Paris). En outre, Hubert DELANGE (91-Orsay), par une méthode similaire, a établi le résultat plus général suivant :

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels de valeur absolue $\leq a$.

Soit, d'autre part, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels de somme non nulle et tels que, pour $1 \leq i \leq n-1$, $|\lambda_{i+1} - \lambda_i| \leq b$ positif.

Si $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq \frac{nab}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ il existe une permutation $(y_1, y_2, \dots, y_n)$

de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que :

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \right| \leq ab$$

(l'énoncé d'Olympiade correspond à : $a = (n+1)/2$, $\lambda_i = i$ et $b = 1$).

ÉNONCÉ 4

Une matrice carrée à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ est appelée matrice **d'argent** si, pour tout $i = 1, \dots, n$, la réunion de la i -ème ligne et de la i -ème colonne contient tous les éléments de S . Montrer que :

(a) Il n'existe pas de matrice d'argent pour $n = 1997$.

(b) Il existe des matrices d'argent pour une infinité de valeurs de n .

SOLUTION

(a) Pour $n \geq 2$, il existe au moins un élément $p \in S$ qui n'apparaît pas sur la diagonale. Mais pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, p apparaît une seule fois dans la réunion de la i -ème ligne et de la i -ème colonne : c'est dire qu'à tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut associer un et un seul $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{ij} = p$ ou bien $a_{ji} = p$ avec $i \neq j$: pour pouvoir classer ainsi en couples les n indices, il faut que n soit pair. Il n'existe donc pas de matrice d'argent pour n impair ≥ 3 , donc en particulier pour $n = 1997$.

(b) Il existe une matrice d'argent d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

Montrons que s'il en existe d'ordre n , il en existe d'ordre $2n$, ce qui prouvera par récurrence qu'il en existe pour toutes les puissances de 2, donc une infinité.

Soit A une matrice d'argent d'ordre n , B une matrice dont chaque ligne et chaque colonne soit une permutation de $\{2n, \dots, 3n-1\}$, et C une matrice dont chaque ligne et chaque colonne soit une permutation de $\{3n, \dots, 4n-1\}$. On choisira par exemple pour B la matrice symétrique :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= i+j+(2n-2) & \text{si } i+j \leq n+1 \\ &= i+j+(n-2) & \text{si } i+j \geq n+2. \end{aligned}$$

Il est clair que la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}$ est d'argent.

REMARQUES

Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen) et Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles) m'ont envoyé leurs solutions, et l'exemple ci-dessus de matrice d'argent est emprunté à Mohammed AASSILA et Jacques BOUTELOUP.

L'exemple que j'avais moi-même trouvé supposait que la matrice A d'argent d'ordre n n'avait que des 1 sur la diagonale : existe-t-il, à ce propos, des matrices d'argent ayant plusieurs nombres distincts sur la diagonale ? Bref, je rajoutais $(2n-1)$ à chaque élément de A pour obtenir la matrice B , et C était identique à B si ce n'est que je remplaçais les $(2n)$ de la diagonale par des $(4n-1)$.

Mais c'est Marie-Laure CHAILLOUT qui propose une technique de construction valable non plus seulement pour les puissances de 2 : l'idée est d'avoir une matrice symétrique avec seulement des 1 sur la diagonale, telle que chaque ligne (donc également chaque colonne) contienne tous les entiers de 1 à n , puis d'ajouter $(n-1)$ aux coefficients sous la diagonale. La matrice symétrique peut être définie par :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= i+j-1 & \text{si } i < n, j < n, i+j \leq n+1, i \neq j \\ &= i+j-n & \text{si } i < n, j < n, i+j \geq n+2, i \neq j. \\ a_{ii} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et si } i \geq 2, \quad a_{i,n} &= a_{n,i} = 2i-1 \text{ si } 2i \leq n+1 \\ &= 2i-n & \text{si } 2i \geq n+2 \end{aligned}$$

$$a_{1,n} = a_{n,1} = n$$

Pour $i \geq 2$, on déporte sur la dernière ligne et sur la dernière colonne l'élément qui se serait trouvé logiquement sur la diagonale si l'on n'avait pas imposé aux éléments de la diagonale d'être égaux à 1.

Par exemple, pour $n = 6$, la matrice symétrique est la suivante :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice d'argent :

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 1 & 3 & 2 \\ 10 & 11 & 7 & 8 & 1 & 4 \\ 11 & 8 & 10 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Grâce à ce procédé très général, il est possible d'organiser une saison de championnat sans que le nombre de clubs engagés soit une puissance de 2 : le club i rencontre à domicile le club j au cours de la p -ième journée si et seulement si $a_{ij} = p + 1$, mais ce n'est évidemment pas possible avec 1997 clubs !

ÉNONCÉ 5

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers $a \geq 1, b \geq 1$ vérifiant l'équation :

$$a^{(b^2)} = b^a.$$

SOLUTION

Le cœur de la démonstration est le lemme suivant :

LEMME

Soient u, v et q trois entiers strictement positifs. u^q divise v^q si et seulement si u divise v .

DEMONSTRATION

Si u^q divise v^q , ce que l'on note $u^q | v^q$, tout facteur premier p de u divise

v : supposons qu'il ait pour exposant α dans la décomposition de u et β dans la décomposition de v : $p^{\alpha\alpha} | p^{\beta\alpha} \Rightarrow \alpha \leq \beta$; donc $u | v$.

RETOUR À L'ÉQUATION

Si, dans un couple solution, $a = 1$, alors $b = 1$, et réciproquement : hormis pour la solution triviale $a = b = 1$, on peut supposer $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

Si l'on avait $a \leq b$, on en déduirait : $a^{(b^2)} = b^a \leq b^b$, soit $a^b \leq b$, ce qui est impossible car pour tout entier $b \geq 0$, $b < 2^b \leq a^b$.

Si, maintenant, on avait $a \leq b^2$, on aurait $a^{(b^2)} = b^a \leq b^{(b^2)}$, donc $a \leq b$, nous venons de voir que c'est impossible.

Puisque $a > b^2$, $b^a = a^{(b^2)} > b^{(2b^2)}$, donc $a > 2b^2$, et $b^{(2b^2)}$ divise $b^a = a^{(b^2)}$ ce qui, par notre lemme, entraîne : $b^2 | a$.

On peut donc poser $a = kb^2$ avec $k > 2$, ce qui ramène l'équation à : $b^k = kb^2$ ou encore $b^{k-2} = k$. Comme pour $k \geq 5$, $b^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$, il ne nous reste que deux cas à étudier :

$$k = 4 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2, a = kb^2 = 16$$

$$k = 3 \Rightarrow b = 3, a = kb^2 = 27.$$

L'équation admet donc trois couples solutions : (1,1), (16, 2) et (27, 3).

REMARQUE

Le lemme était-il évident ? A mes yeux, oui, mais comme tout le monde l'a redémontré, il eût été indécent de faire exception.

Pour le reste, cette équation fait penser à : $x^y = y^x$. On peut d'ailleurs, comme le propose Roger CUCULIERE, poser $c = b^2$, et résoudre plus généralement $a^{2c} = c^a$. L'étude des variations de $(\log x)/x$ nous permet plus classiquement de prouver que $a > 2c$.

J'ai reçu des solutions de : Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jean-Christophe LAUGIER (17-Rochefort), Charles NOTARI (31-Montaud), Moubinool OMARJEE (75 - Paris, qui presque toutes partent de la constatation que a et b doivent être des puissances d'un même entier n . Cela ne dispense pas de prouver que $a > b^2$, mais cela donne une démonstration rapide si l'on remarque que l'un des entiers a ou b doit être égal à n . Hubert DELANGE (91-Bure s/Yvette) propose de généraliser l'équation en : $a^{(b^k)} = b^{(a^h)}$. Pour $h = 1$, les solutions sont de la forme $n^{1/n-k}$, $n^{n/n-k}$, et pour $h = 2$ et $k = 3$, la seule solution est (4,2), si l'on excepte (1,1). Jean-Christophe LAUGIER propose, lui, de résoudre cette équation en rationnels positifs.

ÉNONCÉ 6

Pour tout entier strictement positif n , on désigne par $f(n)$ le nombre de façons de représenter n comme une somme de puissances de 2 à exposants entiers positifs ou nuls.

Deux représentations qui ne diffèrent que par l'ordre des termes de la somme sont considérées comme les mêmes. Par exemple $f(4) = 4$, car le nombre 4 peut être représenté par les quatre façons suivantes ; 4 ; $2 + 2$; $2 + 1 + 1$; $1 + 1 + 1 + 1$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$.

SOLUTION (1)

La fonction f est croissante : à toute représentation de n , je peux adjoindre 1 pour obtenir une représentation de $n + 1$, donc $f(n + 1) \geq f(n)$. Réciproquement, $f(2n + 1) = f(2n)$ car toute représentation de $2n + 1$ contient au moins un 1, et en lui supprimant ce 1, je peux lui associer une représentation de $2n$. En posant, par convention, $f(0) = 1$, on rend cette relation $f(2n) = f(2n + 1)$ vraie, même pour $n = 0$.

Inversement, à toute représentation de $2n$ ne contenant pas le nombre 1, je peux associer bijectivement une représentation de n , en divisant tous les termes par 2. Donc à toute représentation de $2n$ contenant $2k$ fois le nombre 1, on associe bijectivement une représentation de $n - k$, si bien que :

$$f(2n) = \sum_{k=0}^n f(k) \quad (1)$$

Comme f est croissante, $f(2n) \leq 1 + nf(n)$, ce qui prouve par récurrence la majoration cherchée : si $f(2^{n-1}) \leq 2^{(n-1)^2/2}$ (ce qui est déjà vrai pour

$n - 1 = 2$), alors $f(2^n) \leq 1 + \frac{2^{n^2/2}}{\sqrt{2}} < 2^{n^2/2}$.

Pour la minoration, il faut remarquer que la relation (1) entraîne : $f(2) - f(2n - 2) = f(n)$. La fonction : $n \mapsto f(2n) - f(2n - 2)$ est donc croissante, ce qui entraîne que, pour tout k ($0 \leq k \leq n$)

$$f(2n) - f(2n - 2k) \leq f(2n + 2k) - f(2n).$$

Or, $f(2^n) = 2 + 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}-1} f(2k) + f(2^{n-1})$ du fait que $f(2k) = f(2k + 1)$.

Dès lors

$$\begin{aligned}
 f(2^n) &= 2 + f(2^{n-1}) + 2f(2^{n-2}) + 2 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} (f(2^{n-2}-2k) + f(2^{n-2}+2k)) \\
 &> 4f(2^{n-2}) + 2 \sum_{k=1}^{2^{n-3}-1} 2f(2^{n-2}) = 2^{n-1} f(2^{n-2})
 \end{aligned}$$

Donc si $f(2^{n-2}) \geq 2^{(n-2)^2/4}$ (ce qui est vrai pour $n = 3$ et $n = 4$); $f(2^n) > 2^{n^2/4}$, ce qui achève la démonstration, par récurrence.

REMARQUES

Cet énoncé était le plus difficile de la sélection, entre autre parce qu'il met en œuvre des fonctions qui ne s'expriment pas de manière classique, des ordres de grandeurs qu'on ne manipule pas tous les jours. Le majorant est égal au carré du minorant, ce qui représente une fourchette colossale. Or, c'est la minoration qui est la plus difficile à établir alors que la fonction est beaucoup plus proche de son majorant : Hubert DELAGE (91 - Bures s/Yvette) fait remarquer qu'au lieu des puissances de 2, on pourrait tout aussi bien considérer les puissances d'un entier quelconque $p > 1$. Le même raisonnement aboutirait à : $p^{n^2/4} < f_p(p^n) < p^{n^2/2}$

mais en outre, $\text{Log } f_p(n) \sim \frac{\text{Log } n}{2 \text{Log } p}$ ce qui prouve que f_p se rapproche, d'une

certaine manière, de son majorant.

J'ai reçu d'autres solutions voisines, de Mohammed AASSILA (67 - Strasbourg), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles) Moubinoöl OMARJEE (75 - Paris) et, bien sûr, Roger CUCULIÈRE (92 - Clichy), car cet énoncé fait partie de l'ouvrage sur les dix dernière Olympiades que nous publions ensemble, avec Jean-Pierre BOUDINE, aux éditions du Choix.

Mais Claude DESCHAMPS m'a transmis une solution originale de Roberto DVORNICIC, membre italien du jury d'Olympiade, solution s'apparentant à la *Géométrie des nombres* de MINKOWSKY, et c'est par là que je conclurai ces corrigés d'Olympiades 1997 :

SOLUTION (2)

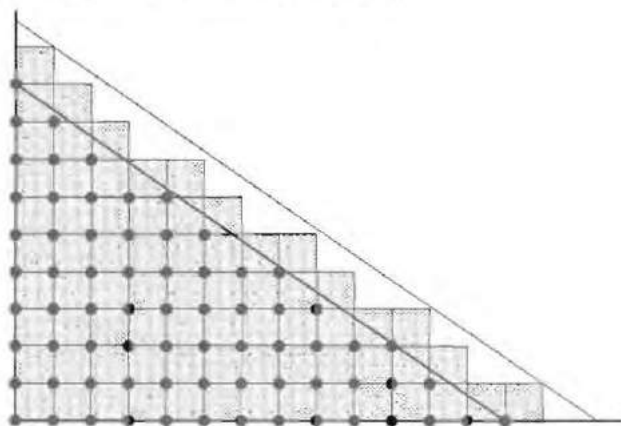
Le problème revient à trouver toutes les solutions en entiers positifs ou nuls de l'équation :

$$x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \dots + 2^n x_n = 2^n$$

ou, ce qui revient au même, toutes les solutions en entiers positifs ou nuls de l'inéquation :

$$2x_1 + 4x_2 + \dots + 2^n x_n \leq 2^n$$

Une seule de ces solutions vérifie $x_n \neq 0$, et à chacune des autres solutions, j'associe un point $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, à coordonnées entières positives ou nulles. On est donc ramené à étudier le nombre de points à coordonnées entières inclus dans un domaine connu de $\mathbb{R}^{n-1}$.



Pour simplifier la tâche du graphiste, la figure est faite dans le cas de $\mathbb{R}^2$, avec un domaine triangulaire ne correspondant pas précisément à celui qui nous préoccupe, car la méthode est très générale et c'est la même chose dans $\mathbb{R}^{n-1}$ que dans $\mathbb{R}^2$. A chaque point entier $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ du domaine j'associe l'hypercube de $\mathbb{R}^{n-1}$ (le carré dans le cas de $\mathbb{R}^2$) :

$$E(x_1) = k_1, E(x_2) = k_2, \dots, E(x_{n-1}) = k_{n-1}.$$

Le nombre de points entiers du domaine est égal à la somme des volumes des hypercubes ainsi définis, puisque chaque hypercube a pour volume 1. S'agissant d'un domaine défini par : $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leq A$, $x_i \geq 0$ pour tout i (les a_i étant eux aussi positifs tout comme A), la somme des volumes des hypercubes est supérieure ou égale au volume du domaine puisque tout point du domaine appartient à un de ces hypercubes : en effet,

$$a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leq A \Rightarrow a_1E(x_1) + \dots + a_{n-1}E(x_{n-1}) \leq A.$$

Inversement, si $a_1(x_1 - 1) + a_2(x_2 - 1) + \dots + a_{n-1}(x_{n-1} - 1) \geq A$, alors $a_1E(x_1) + \dots + a_{n-1}E(x_{n-1}) > A$, donc la somme des volumes de ces hypercubes est majorée par le volume du domaine suivant :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leq A + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}).$$

Si l'on pose $B = A + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, le nombre de points entiers du domaine $a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leq A$ est donc compris entre le volume du

domaine : $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leq A$, soit $\left(\frac{A}{a_1} \cdot \frac{A}{a_2} \dots \frac{A}{a_{n-1}}\right) \frac{1}{(n-1)!}$ et

le volume de : $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leq B$, soit $\left(\frac{B}{a_1} \cdot \frac{B}{a_2} \dots \frac{B}{a_{n-1}}\right) \frac{1}{(n-1)!}$.

Pour $a_i = 2^i$, $A = 2^n$, $B = 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2 = 2^{n+1} - 2$

$$\frac{A}{a_1} \cdot \frac{A}{a_2} \dots \frac{A}{a_{n-1}} = 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \dots 2 = 2^{n(n-1)/2}$$

$$\text{et} \quad \frac{B}{a_1} \cdot \frac{B}{a_2} \dots \frac{B}{a_{n-1}} < 2^n \cdot 2^{n-1} \dots 4 = \frac{1}{2} \cdot 2^{n(n+1)/2}$$

Si l'on récupère la représentation de 2^n que nous avons laissée de côté au début de la démonstration ($x_n = 1$, $x_{n-1} = \dots = x_1 = x_0 = 0$), on a ainsi prouvé que :

$$1 + \frac{2^{n(n-1)/2}}{(n-1)!} \leq f(2^n) < 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2^{n(n+1)/2}}{(n-1)!} \right)$$

ce qui est meilleur que la relation de l'énoncé dans la mesure, notamment, où $2^{n/2} < (n-1)!$ pour $n \geq 4$. En outre, cet encadrement ne vaut pas seulement pour $f(2^n)$: pour tout A compris entre 2^{n-1} et $2^n - 1$,

$$\frac{A^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{2^{n(n-1)/2}} \leq f(A) < \frac{(2^n - 2 + A)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{2^{n(n-1)/2}}$$