ÉNONCÉ 252 (Igor CHARIGUINE, Moscou)

On se donne un angle de sommet O. Sur l'un des côtés, on choisit deux points A et A', et sur l'autre, deux points B et B'. Les droites (AB) et (A'B') se coupent en un point M. Sur le cercle circonscrit au triangle OAB, on construit la corde [OD] parallèle à (A'B'), et sur le cercle circonscrit au triangle OA'B', la corde [OD'] parallèle à (AB).

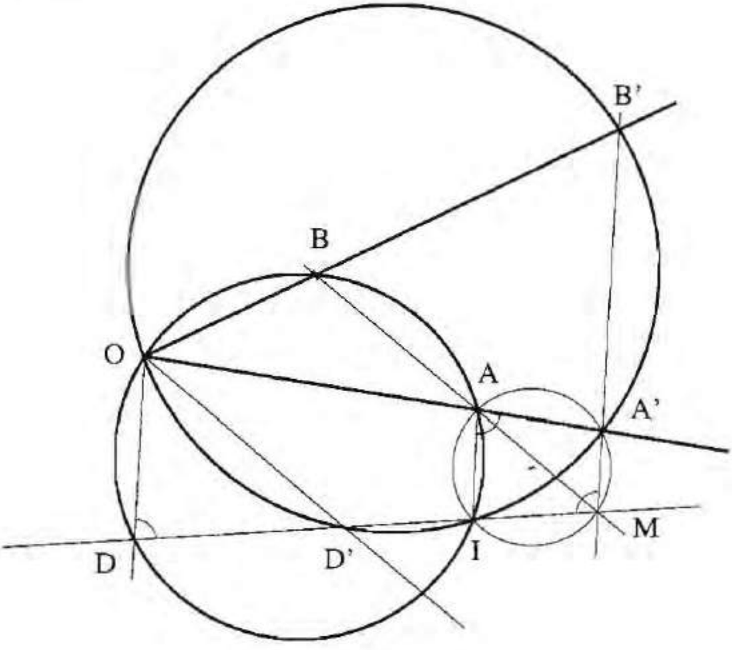
Montrer que la droite (DD') passe par le point M.

RÉPONSE de Jacques BOUTELOUP (76-Rouen)

Il est intéressant de montrer une propriété plus riche d'alignement de quatre points. Nous désignons par I le deuxième point d'intersection des cercles (OAB) et (OA'B'). Les points A, M, I, A' d'une part et B, M, I, B' d'autre part, sont cocycliques. C'est une propriété classique qui peut se justifier de façons variées :

- Par une construction classique, I est le centre de la similitude A $\mapsto$ B, A' $\mapsto$ B'. C'est donc le centre de la similitude A $\mapsto$ A', B $\mapsto$ B', d'où le résultat par la même construction classique.
- Par la directe du théorème de Simson, les projections orthogonales de I sur les côtés de l'angle sont alignées avec celles sur AB et A'B'. D'où la propriété par réciproque du même théorème.
- Par relation classique de points cocycliques : (AM, AI) = (AB, AI) = (OB, OI) = (OB', OI) = (A'B' , A'I) = (A'M , A'I) et la propriété, avec démonstration analogue pour le deuxième cercle.

Le résultat du texte s'établit d'ailleurs en utilisant un seul de ces cercles. (DO,DI) = (AO,AI) = (AA',AI) = (MA',MI) = (A'B',MI). Le parallélisme de (DO) et (AB) entraîne celui de (DI) et (MI), d'où l'alignement de D, I, M. On montre de même l'alignement de D', I, M en remplaçant D, A, A' par D', A', A dans le raisonnement précédent.



AUTRES SOLUTIONS

G. BOUEZ (75-Paris), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Edgard DELPLANCHE (91 - Créteil), Christian DUFIS (87 - Limoges), IREM d'Aquitaine (33 - Talence), René MANZONI (76 - Le Havre), A. MOLARD (67 - Strasbourg), Charles NOTARI (31 - Montaut), Joël PAYEN (93 - Blanc Mesnil), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Anne-Marie RAUCH (67 - Strasbourg), Raymond RAYNAUD (04 - Digne), Pierre RENFER (67 - Ostwald), Jean-Marie ROBBE (25 - Villers le lac), René STORCH (71 - Mâcon) et André VIRICEL (54 - Villers lès Nancy).

REMARQUES

« Cependant qu'à Moscou une habile cuisine
Porte au trône des Tsars un Boris Ethylsine,
Œuvre dans sa datcha un Chariguine Igor
qui unit dans son cœur Lobat et Pythagor »

André Viricel (Août 1996)

Plus prosaïquement, doit-on, dans un tel problème, redémontrer que les cercles circonscrits aux quatre triangles formés par quatre droites prises trois à trois on un point commun (point de MIQUEL du quadrilatère complet) ou peut-on supposer ce résultat connu ?

Même s'il est classique, ce résultat contient l'essentiel de la solution de cet énoncé 252, les trois quarts des lecteurs l'ont utilisé et 80% d'entre eux l'ont redémontré, pour plus de la moitié en utilisant la similitude de centre I ; trois lecteurs (outre Jacques BOUTELOUP) ont utilisé les relations angulaires et un seul la droite de Simson.

Deux lecteurs ont proposé une solution analytique ; par ailleurs, Christian DUFIS propose deux solutions dont une ne fait pas intervenir le point de MIQUEL : le parallélisme (D'B')//(DB) et (OD')//(BM) prouve que l'homothétie de centre D' qui transforme la droite (A'B') en la droite (OD) transforme M en D. Jean-Marie ROBBE prouve d'abord, à l'aide de nombreuses relations angulaires élémentaires, que (D'B)//(DB'), puis que D, I et D' sont alignés, enfin que $\widehat{DMB} = \widehat{D'DO}$.

Maurice PERROT fait intervenir les intersections E et F de (DA') et (DB') avec (AB), prouvant que les triangles DAB et D'EF se correspondent dans une homothétie de centre M, vu que MA'.MB' = MA.MF = MB.ME et que ces triangles ont les mêmes angles. Charles NOTARI propose plusieurs méthodes : par exemple, pour prouver l'alignement de I, D, D', il fait intervenir l'inversion de centre O et de puissance OI^2, qui transforme D et D' en deux points d'où l'on voit le segment [OI] sous le même angle.

A. MOLARD se demande si une solution en géométrie projective ne serait pas plus élégante. Pour le moins, G. BOUEZ, Jacques DAUTREVAUX et Joël PAYEN signalent le cas où les deux cercles seraient tangents en O : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ se correspondraient dans l'homothétie de centre O transformant un cercle en l'autre, donc M serait à l'infini, ce qui, pour G. BOUEZ, n'est pas compatible avec l'énoncé alors que, pour les autres, le résultat général reste valable, du point de vue projectif. Joël PAYEN étudie également le cas I = M où la méthode générale n'est plus utilisable alors que le résultat reste valable. Ce cas se présente lorsque deux des quatre droites se coupent sur l'une des deux autres.

Peu de lecteurs se sont attardés sur les cas particuliers ; par exemple celui où D et D' sont confondus et où l'énoncé perd son sens est signalé par Maurice PERROT et traité en détails par Marie-Laure CHAILLOUT, qui prouve que cela se produit lorsque A, B, A', B' sont cocycliques, donc lorsque O, M, I sont alignés.

L'énoncé plaçait A et A' d'une part, B et B' d'autre part sur une même demi-droite issue de O. G. BOUEZ mentionne que cela n'a rien de pertinent, d'ailleurs 15% des lecteurs ont placé O entre A et A', et 15% n'ont pas fait de figure.

On pouvait énoncer ce problème différemment. André VIRICEL le ramène au lemme suivant : deux cercles se coupent en A et I, une sécante commune menée par A les recoupe respectivement en D et M, alors les droites (OD) et (A'M) sont parallèles. G. BOUEZ remarque que les six points O, A, A', B, B', M sont permutables : étant donné un quadrilatère complet et les quatre cercles circonscrits chacun à un triangle, par les trois sommets du triangle on mène une corde parallèle à la quatrième droite. Les six droites joignant le point de MIQUEL aux six sommets du quadrilatère complet passent chacune par deux des sommets des 12 cordes remarquables ainsi construites.

Il mentionne également, comme généralisation du point de MIQUEL, le théorème de CLIFFORD :

pour $n \geqslant 2$,

- à un système S_{2n-1} de $(2n - 1)$ droites est associé un cercle C_{2n-1} (C_3 est le cercle circonscrit au triangle),
- à un système S_{2n} est associé un point P_{2n}, commun aux 2n cercles C_{2n-1} (P_n est le point commun de Miquel du quadrilatère complet),
- à un système S_{2n+1} est associé un cercle C_{2n+1} contenant les $(2n + 1)$ points P_{2n}.