ÉNONCÉ 253 (Maurice CRESTEY, Vincennes)

Pour chaque valeur de l'entier naturel n, on pose $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$ où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t.

Etablir la convergence de la suite de terme général :

$$V_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \quad (N \in \mathbb{N}^*).$$

SOLUTION de Renaud PALISSE (Paris)

Posons $W_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k$ et dans tout ce qui suit : $K = E(\sqrt{N})$.

On a : $W_N \leqslant \sum_{n=1}^{K^2+2K} u_n = \sum_{k=1}^{K} b_k$ avec $b_k = \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} (\sqrt{n} - k)$

Or, $\sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \sqrt{n} \leqslant \int_{k^2}^{(k+1)^2} \sqrt{x}\,dx = 2k^2 + 2k + 2/3$, donc $b_k \leqslant k + 2/3$.

Par conséquent, $W_N \leqslant \frac{K(K+1)}{2} + \frac{2K}{3}$.

D'autre part $W_N \geqslant \sum_{n=1}^{K^2} u_n = \sum_{k=1}^{K-1} a_k$, avec $a_k = \sum_{n=k^2+1}^{(k+1)^2} u_n$

Or, $\sum_{n=k^2+1}^{(k+1)^2} \sqrt{n} \geqslant \int_{k^2}^{(k+1)^2} \sqrt{x}\,dx$, d'où $a_k \geqslant k - 1/3$.

Par conséquent, $W_N \geqslant \frac{K(K-1)}{2} - \frac{K}{3}$

Finalement, comme $N \sim K^2$, on a $V_N \to 1/2$.

AUTRES SOLUTIONS

Jacques AMON (87 - Limoges), Alain BAILLE (38 - Grenoble), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Roger CUCULIERE (94 - Marnes la vallée), Jean-Joël DELORME (69 - Lyon), Francis DREY (67 - Haguenau), Martine GINESTET (75 - Paris), Jean-Louis LACAZE-ESCOUS (75 - Paris), Marie-Christine LOMBARD (83 - Toulon), René MANZONI (76 - Le Havre), Omarjee MOUBINOOL (75 - Paris), Charles NOTARI (31 - Montaut), Joël PAYEN (93 - Blanc

Mesnil), Denis PEPIN (51 - Verdun), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Anne-Marie RAUCH (67 - Strasbourg), Xavier RELIQUET (78 - Chambourcy), Pierre RENFER (67 - Ostwald), Jean RUFFIN (23 - St Pardon le neuf).

REMARQUES

« Quelques mots tout d'abord sur l'origine de cet énoncé, écrit Maurice CRESTEY.

On peut démontrer que l'ensemble des u_n est dense dans $[0\,,\,1]$. Ce résultat figurait dans un livre d'exercices pour la classe de math.sup, aujourd'hui épuisé que j'avais rédigé en 1969 (Editeur DUNOD).

Par ailleurs, la valeur de la limite éventuelle de la suite des moyennes arithmétiques donne une idée de la répartition des u_n dans l'intervalle $[0\,,\,1]$.

Dans un domaine voisin, citons un théorème de Sierpenski :

Pour tout réel x, la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[kx - E(kx)\right]$ converge et sa limite λ_x vérifie l'inégalité $\lambda_x \leqslant 1/2$, l'égalité n'étant vérifiée que pour x irrationnel.

D'où l'idée de l'énoncé précédent... »

Comme l'ont remarqué bon nombre de lecteurs, nous avons là un exemple typique de suite non convergente qui converge en moyenne de Césaro.

Mais deux questions se posent : peut-on en dire plus sur cette suite et peut-on généraliser le résultat à d'autres suites ?

Roger CUCULIÈRE demande : " Est-il vrai que $V_N - \frac{1}{2} \sim \frac{-1}{3\sqrt{N}}$ quand $N \to +\infty$? " Certes non! C'est vrai si N est un carré parfait, mais si $N = p^2 + p$, $V_N - \frac{1}{2} \sim \frac{-7}{12\sqrt{N}}$.

Par contre, Xavier RELIQUET prouve, par récurrence sur $k = E\left(\sqrt{N}\right)$, que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $V_N \leqslant 1/2$.

En effet, si l'on pose $N = k^2 + p$,

$$V_N \leqslant \frac{k^2 - 1}{k^2 + p} V_{k^2 - 1} + \frac{1}{2k\left(k^2 + p\right)} \sum_{i=0}^{p} i$$

Avec cette même notation, signalons que la comparaison entre série et intégrale n'est pas la seule méthode utilisée pour encadrer V_N. Bon nombre de lecteurs ont fait appel au développement limité de $\sqrt{1+x}$, mais certains écrivent : $\frac{p}{2k+1} \leqslant \frac{p}{\sqrt{N}+k} = \sqrt{N} - k \leqslant p/2k$, ce qui donne un encadrement plus simple et un peu meilleur :

$$K \leqslant \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) \leqslant k + 1/2.$$

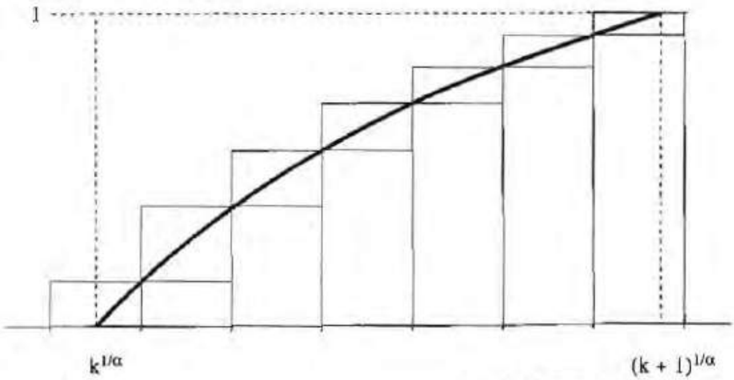
OMARJEE Moubinool remarque que la suite $\sqrt{n} - E(\sqrt{n})$ est équirépartie dans $[0\ ,\ 1]$, c'est-à-dire que si $I \subset [0\ ,\ 1]$ est un intervalle de longueur λ, le nombre de $n \leqslant N$ tels que $u_n \in I$ est équivalent à λN lorsque N tend vers l'infini. Il cite à ce sujet : RAMIS-DESCHAMPS : *Exercices analyse, Tome 2*, RAUZY Gérard, *Propriétés statistiques des suites* (PUF) et POLYA Szegö.

Autre question abordée par plusieurs lecteurs : peut-on généraliser et calculer la limite de $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^{\alpha} - E\left(k^{\alpha}\right)$? Certes : pour $0 < \alpha < 1$, cette limite vaut encore 1/2, mais le cas $\alpha > 1$ semble plus difficile.

On peut, dans le cas où $\alpha < 1$, généraliser la comparaison entre série et intégrale :

$$\int_{k^{1/\alpha}}^{(k+1)^{1/\alpha}} \left(t^{\alpha} - k\right) dt - 1 \leq \sum_{E(n^{\alpha})=k}^{N} n^{\alpha} - E\left(n^{\alpha}\right) \leq \int_{k^{1/\alpha}}^{(k+1)^{1/\alpha}} \left(t^{\alpha} - k\right) dt + 1$$

Comme le montre la figure.



En additionnant, on a, si $E(N^\alpha) = k$,

$$F(k) - k \leqslant \sum_{n=1}^{N} n^\alpha - E(n^\alpha) \leqslant F(k+1) + (k+1),$$

avec
$$F(k) = \int_0^{k^{1/\alpha}} t^\alpha \, dt \sum_{n=1}^{k} n^{1/\alpha} - k\left(k^{1/\alpha}\right)$$

Or,
$$\sum_{n=1}^{k} n^{1/\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha+1} k^{1+1/\alpha} + \frac{1}{2} k^{1/\alpha} + O\left(k^{1/\alpha - 1}\right)$$

d'où le résultat, grâce au deuxième terme $1/2\ k^{1/\alpha}$ qui devient la partie principale de F(k). Cette dernière égalité n'est que le tout début de la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin utilisée, par exemple, pour la formule de Stirling ou dans l'énoncé 254 ci-après, mais dans notre cas particulier, il suffit de remarquer que :

$$\left(\frac{k^{n+1}}{u+1} + \frac{1}{2} k^u\right) - \left(\frac{(k-1)^{u+1}}{u+1} + \frac{1}{2}(k-1)^u\right) = k^u + O\left(k^{u-2}\right)$$

u étant un exposant quelconque, en l'occurrence $u = 1/\alpha$.

Signalons pour conclure l'intéressante relation utilisée par Marie-Laure CHAILLOUT dans le cas où $\alpha = p/q$ $(p < q)$

$$\sum_{k=1}^{n^p} E\left(k^{q/p}\right) + \sum_{k=1}^{n^q} E\left(k^{p/q}\right) = n^{p+q} + n$$

L'idée est d'étudier le nombre de solutions de : $E(k^{p/q}) = i$ pour $1 \leqslant i < n^p$.
Si l'on rapproche de notre formule sommatoire :

$$\sum_{k=1}^{n^p} k^{q/p} + \sum_{k=1}^{n^q} k^{p/q} = n^{p+q} + \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{2} n^q + O\left(n^{q-p}\right)$$

on voit pourquoi il est plus facile de conclure lorsque l'exposant α est inférieur à 1 que lorsqu'il est supérieur…