

Courrier des lecteurs

L'effet Condorcet et le Théorème d'Arrow

B. Monjardet

Université Paris I et CAMS EHSS

Le numéro 414 du *Bulletin*, contient une brève présentation de "l'effet Condorcet" et du théorème d'Arrow. Alors que l'existence d'un tel théorème est relativement connue, c'est peut être l'occasion de signaler un fait moins connu : ce théorème, qui date de 1951, a eu une immense postérité qui n'est pas près de s'achever.

En premier lieu ce théorème a été le résultat fondateur de ce qu'on appelle maintenant *la théorie du choix social*, théorie qui compte actuellement des centaines d'articles et des dizaines de livres.

Cette théorie s'est d'abord consacrée à rechercher des affaiblissements des conditions imposées par Arrow à sa procédure d'agrégation des opinions individuelles afin d'éviter le résultat d'incompatibilité arrowien. Les nombreuses recherches (encore en cours) dans cette direction ont montré le caractère extrêmement robuste du théorème d'Arrow, en ce sens que même en supprimant ou en affaiblissant un (ou même simultanément plusieurs) axiomes arrowiens, les procédures d'agrégation des opinions individuelles obtenues ont encore beaucoup d'effets indésirables. Par exemple au lieu d'obtenir comme dans la version "existentielle" du théorème d'Arrow une procédure *dictatoriale* (un seul individu décide de la préférence collective), on obtient une procédure *oligarchique* (un groupe d'individus, lorsqu'ils sont d'accord, décident de la préférence collective). La théorie du choix social s'est aussi développée dans de multiples autres directions dont je ne mentionnerai que celle reliée à la théorie des jeux. Un théorème de Gibbard et de Satterthwaite (1973, 1975), aussi fondamental que celui d'Arrow (et qui lui est d'ailleurs équivalent en un certain sens), a en effet montré que toutes les procédures d'agrégation des préférences individuelles en un choix collectif (le résultat de procédure n'est plus une préférence collective sur l'ensemble des candidats possibles, mais une partie de ces candidats) qui sont non dictatoriales (le choix n'est pas toujours celui du même individu) sont *manipulables* au sens suivant : il existe toujours des états de l'opinion dans lesquels des individus ont intérêt à voter non selon leur vraie opinion mais selon une opinion tactique (ce résultat formalise des constatations que peut faire n'importe quel familier de votes de commissions et est à rapprocher de la pratique bien connue du "vote utile"). Le résultat d'une procédure de vote dépend alors des stratégies utilisées par les votants (adoptant telle ou

telle préférence) et cette procédure s'analyse à l'aide des outils de la théorie des jeux (de Von Neumann, Morgenstern et leurs nombreux continuateurs).

En second lieu des théorèmes arrowiens ont été obtenus dans bien d'autres domaines que la théorie du choix social. Comme l'avait en effet montré dès 1952 G.Th. Guilbaud dans son article magistral "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", (repris dans *Éléments de la théorie des jeux*, Paris, Dunod, 1968), le théorème d'Arrow doit être replacé dans le cadre d'un problème général : celui d'agréger des objets de nature complexe en un objet de même nature, problème notamment soulevé aux débuts de la statistique descriptive avec les polémiques autour de *l'homme moyen* de Quételet. Ainsi dans la statistique descriptive moderne, *i.e.* l'analyse des données, on a montré des théorèmes arrowiens, par exemple lorsqu'on entend résumer plusieurs classifications d'un ensemble d'objets en une seule classification.

Enfin la multiplicité même des résultats arrowiens a conduit à essayer d'élaborer des théories plus abstraites permettant de rendre compte des similarités et des différences de ces résultats. Dans ces tentatives encore imparfaites on a utilisé des outils comme l'algèbre linéaire, la théorie des ensembles ordonnés ou celle des points fixes et on a récemment opéré des rapprochements inattendus entre le théorème d'Arrow et des résultats de mathématique pure motivés par de toutes autres considérations.

Ne souhaitant pas noyer le lecteur dans un flot bibliographique (qui serait d'ailleurs principalement anglophone), je me contenterais d'ajouter aux 3 références citées dans l'article du Bulletin celle de l'excellent ouvrage de J.L. Petit et E.Térouanne (*Résumons nous, Modèles mathématiques en sciences sociales*, Ellipses, 1988) qui développe de manière très pédagogique le point de vue exprimé par Guilbaud, et de signaler que la revue *Mathématiques et Sciences Humaines* (devenue depuis *Mathématiques Informatique et Sciences Humaines*) a consacré plusieurs numéros spéciaux à ces questions ou des questions voisines : Opinions et scrutins (43, 1973) ; Modélisations des préférences et quasi-ordres (62 et 63, 1978) ; Métriques et relations (67, 1979) ; Combinatoire et analyse des données (99 et 100, 1987) ; Condorcet et les élections (111, 1990) ; Tournois et analyse des préférences ordinales (133, 1996). (on peut encore se procurer certains numéros en écrivant au CAMS, *Revue Mathématiques Informatique et Sciences Humaines*, 54 bd Raspail 75270 Paris Cedex 06, 0149542042, mish@ehess.fr).