

Dans nos classes

Collège

Égalités - Équations

Raymond Raynaud

Au cours des journées d'Albi, André Antibi a évoqué un bon nombre de questions.

Je voudrais contribuer - très partiellement - à la réflexion qu'il propose.

Sur le plan du raisonnement et de la rigueur, je souhaiterais, en particulier, que dans le cadre des "problèmes spéculatifs" (équations, constructions, lieux géométriques), on distingue clairement ce qui **est** de ce qui **est à réaliser**, et que l'on remette en usage :

- la méthode par **analyse et synthèse**, limpide, très sécurisante, facile à rédiger,
- les notions de **proposition**, de **valeur logique** d'une proposition, d'**équivalence logique**.

Notions d'une grande simplicité, qui permettent des rédactions **clairement justes** ou **clairement fausses**, à l'opposé des misérables "on a", "il vient", "on peut écrire", etc.

Ce qui rend les **mathématiques difficiles** pour les élèves et les en dégoûte, c'est notamment le **flou**, les **rédactions molles** que parfois l'on tolère.

Par exemple, **la confusion entre égalité et équation est courante**, et voici pour en montrer le **danger...**

I) Une mystification

Maurice Brunet dans le courrier du numéro 42 de *Tangente*, jouant sournoisement **d'énoncés non présentés : équations ? égalités ?** "établit" que $3 = 0$:

Résoudre dans \mathbf{R} l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ (1).

0 n'est pas solution, on peut donc diviser les deux membres par x :

$$x + 1 + 1/x = 0$$

d'où $1/x = -(x + 1)$

or d'après (1) $-(x+1) = x^2$

d'où $1/x = x^2$ et $x^3 = 1$

La solution est donc $x = 1$. Et on en déduit $1^2 + 1 + 1 = 0$, $3 = 0$!

Maurice Brunet nous présente d'abord, **sans le dire**, deux **équations** équivalentes à la première.

Il utilise ensuite une **égalité** qui repose sur l'**hypothèse non formulée** que x est une solution de l'équation (1).

Non formulée, l'**hypothèse** ne sera **pas contestée**.

Le mauvais tour est joué.

Avec l'aide de collègues, j'ai fait une petite enquête :

- À des élèves du collège ou du lycée, on a demandé de définir clairement la faute commise volontairement par Maurice Brunet. Il n'y en a pas un sur dix qui l'ait vraiment identifiée.
- Sur treize élèves ingénieurs de l'École supérieure de Mécanique de Marseille, si tous ont détecté "la ligne où il devait se passer quelque chose", aucun n'a montré qu'il faisait la différence entre égalité et équation. Dix sur quinze n'ont pas été convaincus d'emblée par les explications de leur professeur ; puis se sont montrés finalement très admiratifs. Un seul a évoqué la notion d'équations équivalentes. Quelques uns "se sont souvenus" de raisonnements par analyse et synthèse, qu'ils avaient utilisés dans le cadre des problèmes de lieux géométriques, mais jamais pour la résolution des équations.
- Parmi quelques adultes non enseignants consultés, l'un, qui avait "fait Math-Elém", a découvert immédiatement la faute et l'a parfaitement commentée.

Acceptant le processus de Maurice Brunet, reprenons-le, sans tricher, par **"analyse et synthèse"**.

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1)

Analyse

Supposons S non vide et désignons par a une des solutions.

$$\text{Alors} \quad a^2 + a + 1 = 0 \quad (1) \quad (\text{égalité})$$

$$a \neq 0, \text{ donc} \quad a + 1 + 1/a = 0, \quad 1/a = -(a+1) \quad (\text{égalités})$$

$$\text{or, d'après (1)} \quad -(a + 1) = a^2 \quad (\text{égalité})$$

$$\text{donc, } 1/a = a^2 \text{ et finalement } a^3 = 1, \quad a = 1 \quad (\text{égalités})$$

Par conséquent, **si a est une solution**, alors $a = 1$. $S \subset \{1\}$.

L'équation n'est **pas résolue** mais le progrès accompli est énorme : Il nous fallait construire S à partir des éléments de l'immense \mathbf{R} . Alors que maintenant, **seul 1 est à mettre à l'épreuve**.

Synthèse

Et surtout pas "vérification" : On n'a pas dit que 1 était solution. On "l'essaie".

$$\text{Lorsque } x = 1, \quad x^2 + x + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3 \neq 0. \quad 1 \notin S$$

Conclusion

L'équation n'a pas de solution. $S = \emptyset$.

N.B. Cette analyse-synthèse n'est évidemment pas à préconiser pour la résolution de l'équation de Maurice Brunet. Son but est simplement de mettre en évidence la **confusion** source de la mystification.

En outre, le formalisme utilisé (\subset , \notin , \emptyset) n'a rien d'obligatoire, mais il illustre bien le sens de la démarche.

II) Désinvoltures

Demandons-nous si dans la pratique scolaire on raisonne mieux que ne le proposait notre mystificateur.

Y distingue-t-on égalités et équations, avec les langages qui leur sont associés ?

Exemples 1

- Extrait d'un livre de quatrième (édition de 1992) :

Traduisons la phrase "La somme des âges de Julie et de sa mère..." par

une **égalité**.

On obtient ainsi l'**équation** du problème.

• Extrait d'un livre de troisième (édition de 1993), au cours de la résolution d'un système de deux équations E_1, E_2 à deux inconnues :

À partir de l'**équation** E_2 exprimer y en fonction de x .

Dans l'**équation** E_1 remplacer y par l'expression trouvée.

On obtient ainsi une **égalité** où ne figure plus que l'inconnue y .

Exemple 2

Voici un problème proposé dans un livre de seconde (édition 1995) :

Lorsqu'on ajoute le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $1789 / 1994$ on obtient 2 comme résultat. Quel est ce nombre?

L'auteur, biaisant à mon avis le sens du problème (je m'en expliquerai plus loin), entreprend de résoudre dans $\mathbf{R} - \{-1994\}$ l'**équation** $(1789 + x) / (1994 + x) = 2$. Voici sa rédaction :

On obtient une équation équivalente en multipliant les deux membres par l'expression non nulle $1994 + x$.

Nous avons ainsi $1789 + x = 2(1994 + x)$

ou encore $1789 + x = 3988 + 2x$

Il en découle immédiatement $x = -2199$.

Comme $-2199 \neq -1994$, le nombre cherché est -2199 .

Excepté la formule "On obtient une équation équivalente", qui ne vaut que pour l'équation qui va suivre, on retrouve les trop habituels "nous avons" et "il en découle" qui n'ont aucunement vocation à introduire des **équations** équivalentes mais bien plutôt des **égalités**.

Sur le fond, cette rédaction est de la même veine que celle de Maurice Brunet et elle peut entraîner les mêmes **dérives**.

Je regrette que l'on ne voie plus de résolutions nettes du style de celle-ci :

Pour tout x de $\mathbf{R} - \{-1994\}$,

$$((1789+x)/(1994+x) = 2) \Leftrightarrow (1789+x = 2(1994+x)) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x = -2199).$$

L'équation a une solution unique : -2199 .

Il est dommage que ce type de présentation ait disparu sous le prétexte que le symbole \Leftrightarrow était mal utilisé.

À nous, les concepts de proposition et d'équivalence logique ayant été clarifiés, d'en réintroduire un usage raisonnable.

Après une courte période d'apprentissage des assertions comme les suivantes seront familières et ne demanderont aucun discours explicatif :

Quels que soient les réels X, Y, Z $(X+Y = Z) \Leftrightarrow (X = Z-Y)$
 $(XY = 0) \Leftrightarrow (X = 0 \text{ ou } Y = 0)$
 et, à condition que $Z \neq 0, (X = Y) \Leftrightarrow (XZ = YZ)$

Exemple 3

Voici un autre exercice du même ouvrage de seconde :

Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + y = -2 & (1) \\ 5x + 4y = 1 & (2) \end{cases}$$

Le déterminant du système, $2 \times 4 - 5 \times 1 = 3$, est non nul. Le système admet une unique solution.

Résolution par **substitution**.

Isolons y dans (1) : $y = -2x-2$.

Reportons cette expression dans (2) :

$$5x + 4(-2x-2) = 1, \text{ soit } -3x-8 = 1.$$

Résolvons l'équation $x = -3$ et par suite $y = 4$.

Conclusion : Le système admet une seule solution $(-3,4)$.

La mécanique tourne : isolons, reportons, résolvons. On **sait faire**.

Mais **sait-on ce que l'on fait** ?

Il est clair que dans toute cette résolution, on a manipulé des **équations** (cf "Résolvons l'équation").

Il est donc **indispensable** de préciser quel rapport avec le système a chacune des équations formées. Or, ici, nul souci de cet impératif. Et pour cause. Dans quel embarras de rédaction l'auteur serait-il plongé !

Comment, par exemple, aurait-il présenté honnêtement l'équation

$5x + 4(-2x-2) = 1$ s'il ne s'était borné à l'introduire par le seul énoncé de la manipulation qui l'a produite ?

Voilà l'exemple même d'un travers qu'il faut combattre : **On décrit abondamment ce que l'on fait**, et qui se voit, **mais on néglige de dire ce que l'on obtient** (équation équivalente, équation conséquence), et qui ne se voit pas.

Et pourquoi, dans cet exemple, avoir adopté (et si mal géré) le style **équation** quand le théorème d'existence offrait une résolution toute simple par **égalités** enchaînées :

Le système a une solution. Désignons-la par (a, b) .

Alors

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ 5a + 4b = 1 \end{cases} \quad (\text{égalités})$$

donc $b = -2 - 2a$ (égalité)

donc $5a + 4(-2 - 2a) = 1$, $-3a - 8 = 1$ (égalités)

donc $a = -3$ et $b = 4$. (égalités)

La solution du système est le couple $(-3, 4)$.

III) Égalité ou équation ?

1) Reprenons l'exemple 2 précédent

Lorsqu'on ajoute le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $1789 / 1994$, on obtient 2 comme résultat. Quel est ce nombre ?

Voilà un nombre qui **existe**.

Dans le Bulletin n° 411, page 511, C. Jeandreau insiste sur "la valeur existentielle du présent de l'indicatif" et sur " la mauvaise foi qu'il y aurait à la nier".

Il s'agit donc simplement pour moi de **calculer ce nombre, dont l'existence n'est pas mise en doute**, à partir de l'information qui vient de m'être donnée à son sujet.

Désignons-le par a .

Alors $\frac{1789+a}{1994+a} = 2$ (égalité)

Donc $1789 + a = 2(1994 + a)$ (égalité)

Donc $a = 1789 - 3988$ (égalité)

Donc $a = -2199$. (égalité)

Conclusion : Le nombre cherché est -2199 . **Fin**.

Et évidemment pas de réciproque : le nombre cherché **ne peut être que** -2199 . Or il existe. Donc **il est** -2199 .

Pas de vérification non plus : si je crains de m'être trompé, je fais, au brouillon, les vérifications utiles. Je procède éventuellement aux rectifications voulues, et je présente seulement au lecteur ce que je juge être parfait.

Pas la moindre trace d'**équation** dans cette affaire. L'information donnée se traduit par une **égalité**. La rédaction est parfaitement **claire** et d'une **grande simplicité**.

La "mauvaise foi" consiste ici, comme l'a fait l'auteur, à ne pas traiter ce

problème là, mais celui-ci :

Existe-t-il un nombre tel que lorsqu'on l'ajoute au numérateur et au dénominateur de la fraction $1789/1994$ on obtienne 2 comme résultat. Et si oui, quel est ce nombre ?

Voilà un énoncé qui, lui, nous dirige vers une **équation**.

On la résout par analyse et synthèse au collège, de même ou par équivalences au lycée.

2) Le moment est alors venu de s'intéresser à ces innombrables problèmes du premier cycle, du même type que le précédent sous sa version initiale :

Pierre a 5 billes de plus que Jean. À eux deux ils en ont 25. Combien chacun en a-t-il ?

L'énoncé décrit une situation réelle. Je n'ai pas à la mettre en doute. J'utilise **honnêtement** l'information qui m'est donnée :

Soit x le nombre des billes de Jean.

Pierre en a $x+5$. À eux deux ils en ont $2x+5$. Je traduis la situation par **l'égalité** $2x+5 = 25$.

D'où $2x = 20$, $x = 10$.

Jean a 10 billes et Pierre en a 15. **Fin**.

Ni réciproque, ni vérification. Voir plus haut.

On a noté qu'il n'y a pas l'ombre d'une **équation** dans la résolution de ce problème. Les informations de l'énoncé ont été traduites très honnêtement par des **égalités** vigoureusement affirmées, sans habillage oiseux.

3) Si l'on veut que nos collégiens sacrifient au **rite** de la "mise en équation", il faut poser le problème autrement :

Est-il possible, si Pierre a 5 billes de plus que Jean, qu'ils en aient 25 à eux deux ?

Si oui, combien chacun d'eux en a-t-il ?

Première observation

Si je lance ma résolution, comme c'est la coutume, par "*Soit x le nombre des billes de Jean*", c'est que j'admets comme possible la situation au sujet de laquelle on m'interroge. Je dois donc en **formuler l'hypothèse** dès le début, et reconnaître honnêtement que je pars pour les **égalités** d'une **analyse**, qui devra être suivie d'une **synthèse** (et non pas d'une "vérification").

Si je veux rester dans la tonalité **équation**, mon départ doit être :

Soit x un entier positif quelconque.

Puis, (x est le nombre des billes de Jean) $\Leftrightarrow (x + x+5 = 25) \Leftrightarrow etc.$

Pour pouvoir **concilier honnêteté et simplicité**, il serait sage, dans le premier cycle, de laisser le problème sous sa forme initiale. Et de répondre par des **égalités** à des questions posées au sujet d'une situation **concrète** donnée.

Ce qui ne veut pas dire qu'il faille se priver de proposer des **équations** abstraites, à résoudre suivant les cas, par analyse et synthèse ou par équivalences.

Seconde observation

Au sujet du problème des billes posé sous sa première forme, je pense qu'il faut éviter les énoncés malhonnêtes du genre

"Pierre a 5 billes de plus que Jean. À eux deux ils en ont 24... "

Sauf peut-être si l'on ajoute *"Est-ce possible ?"* afin de donner au débutant le courage de contester la validité de l'information fournie.

IV) En résumé

Sur le thème "Égalités - Équations", j'ai exprimé mes réactions à certaines pratiques, tout en répondant à quelques-unes des questions d'André Antibi.

Dans un domaine où les élèves ont souvent beaucoup de mal à distinguer ce qui **Est** (champ des égalités) de ce qui **Est à faire naître** (champ des équations), il faut être particulièrement scrupuleux et exigeant.

À problème honnête, solution honnête :

Si nulle question d'existence ne se pose, les **égalités** feront l'affaire. Dans le cas contraire, il faudra recourir aux **équations**. Se gardant des confusions que j'ai dénoncées, on les résoudra par analyse et synthèse ou par équivalences, ou par toute autre méthode que les élèves reconnaîtront comme claire et sûre.