

Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour) à :

Robert FERRÉOL

6, rue des annelets

75019 PARIS.

par internet : rferreol@club-internet.fr

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

Avis de recherche n° 96 de Robert Ferréol.

Étant donné trois arcs de courbe ainsi disposés, je recherche un algorithme pour construire, par approximations successives, le cercle inscrit dans cette figure.



RÉPONSES

Avis de recherche n° 84

Problème des boeufs de Newton : « sachant que $n_1(=75)$ boeufs ont brouté en $T_1(=12)$ jours l'herbe d'un pré de $S_1(=60)$ ares, et que $n_2(=81)$ boeufs ont brouté en $T_2(=15)$ jours l'herbe d'un pré de $S_2(=72)$ ares, on demande le nombre n_3 de boeufs nécessaires pour brouter en $T_3(=18)$ jours l'herbe d'un pré de $S_3(=96)$ ares. On suppose que dans les trois prés, l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des boeufs, et qu'elle continue de croître uniformément depuis leur entrée. »

La réponse donnée dans les livres conduit à la relation :

$$\frac{T_2 - T_3}{A_1} + \frac{T_3 - T_1}{A_2} + \frac{T_1 - T_2}{A_3} = 0, \text{ où } A_i = \frac{n_i T_i}{S_i}, \text{ ce qui fournit } n_3 = 100.$$

Qu'en pensez-vous ?

Dans le n° 417, j'ai donné une solution à partir de l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dt} - ks = -nv$$

où $s(t)$ est la surface non broutée à l'instant t d'un champ donné,

n est le nombre de bœufs broutant ce champ,

v la surface broutée par un boeuf par unité de temps,

k le coefficient de repousse de l'herbe,

qui aboutit à

$$A_i = \frac{n_i T}{S_i} = \frac{1}{v} \times \frac{kT}{1 - e^{-kT}} \quad (1).$$

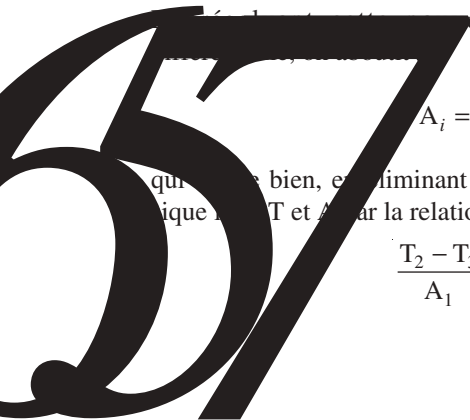
Jean Moreau de Saint Martin (moreausm@cpgc.equipement.gouv.fr) a trouvé

mon erreur : les bœufs ne sont pas Attila, l'herbe qui a été broutée repousse !

Il faut raisonner en quantité d'herbe, avec un accroissement proportionnel à la surface initiale $s(0)$, et non à la surface non broutée $s(t)$. La bonne équation

différentielle est donc $\frac{ds}{dt} = ks(0) - nv$ au lieu de $\frac{ds}{dt} = ks - nv$.

Pour me défendre, j'ai trouvé un modèle qui pourrait correspondre à ma théorie : remplaçons les champs par des lacs, l'herbe par des nénuphars (ou des jacinthes d'eau dont je viens de lire qu'elles colonisent les lacs d'Afrique), et je laisse les collègues trouver par quoi on pourrait remplacer les bœufs.



elle et extrêmement complexe équation

$$A_i = \frac{n_i T}{S_i} = \frac{1}{v} \times (1 + kT) \quad (2),$$

qui, en éliminant v et k entre les trois relations, le résultat classique est $\frac{T_2 - T_3}{A_1} + \frac{T_3 - T_1}{A_2} + \frac{T_1 - T_2}{A_3} = 0$.

$$\frac{T_2 - T_3}{A_1} + \frac{T_3 - T_1}{A_2} + \frac{T_1 - T_2}{A_3} = 0.$$

Les deux résultats sont numériquement proches car

$$\frac{kT}{1 - e^{-kT}} = 1 + \frac{kT}{2} + \frac{(kT)^2}{12} + \dots ;$$

si l'on néglige les termes du second ordre en kT ou d'ordre supérieur, (1) se transforme en (2), quitte à changer k en $k/2$. Ici kT est de l'ordre de 2 au maximum, mais si les données en n , T , S conduisent à une valeur non petite de kT , on pourra trouver des écarts notables entre la solution de Newton et la mienne.

Pour conclure sur les bœufs de Newton, je vous propose une solution discrète du problème, avec de nouveau une repousse proportionnelle à la surface non broutée.

Écrivons cette fois :

$$S_{p+1} = S_p - nQ + kS_p$$

où S_p est la surface non broutée au jour p ,
 n est le nombre de bœufs broutant ce champ,
 Q la surface broutée par un boeuf en un jour,
 k le coefficient de repousse de l'herbe.

La résolution de cette suite arithmético-géométrique aboutit cette fois à

$$A_i = \frac{n_i T}{S_i} = \frac{k}{Q} \times \frac{T}{1 - (1+k)^{-T}},$$

qui, pour k petit, redonne bien encore une relation similaire à (2) : $A_i = \frac{n_i T}{S_i} \approx \frac{1}{Q} \times \left(1 + \frac{k}{2} T\right)$. Numériquement, on trouve 98,82... bœufs ...

Voilà Newton qui voulait nous faire travailler les proportionnalités, et nous travaillons les équations différentielles et les suites récurrentes !

P.S. : j'ai reçu depuis la rédaction du texte ci-dessus de très nombreuses et intéressantes contributions sur ce problème qui apparemment a agréablement occupé vos vacances, que je suis obligé de reporter au bulletin suivant.

A propos de l'avis de recherche n° 86 qui posait le problème de l'existence de polyèdres à 7 arêtes (voir la réponse négative dans le numéro 415), Michel Lafond (Dijon) a envoyé une démonstration de la condition de STEINIZ :

(C) $S \geq 4$, $A = S + F - 2$, $2A \geq 3F$, $2A \geq 3S$
 condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polyèdre convexe ayant S sommets, F faces et A arêtes.

Cette condition, dont on a vu qu'elle était nécessaire, équivaut à :

(C') $S \geq 4$, $2 + S/2 \leq F \leq 2S - 4$, $A = S + F - 2$.

ELLE EST SUFFISANTE car :

- * Si $S = 4$, alors $4 \leq F \leq 4$: le tétraèdre convient.
- * Si $S = 5$, alors $5 \leq F \leq 6$ et
 pour $F = 5$, la pyramide à base carrée convient ;
 pour $F = 6$, deux tétraèdres accolés (bipyramide) font l'affaire.
- * Si $S \geq 6$, distinguons deux cas : $2 + S/2 \leq F \leq S$, et $S + 1 \leq F \leq 2S - 4$.
 PREMIER CAS : $2 + S/2 \leq F \leq S$.

- ou bien $S = 2n$ et (C') équivaut à : $n + 2 \leq F \leq 2n$.

Considérons le prisme (P) dont les bases sont deux polygones à n côtés (c'est possible puisque $S \geq 6 \Rightarrow n \geq 3$). (P) a $2n$ sommets et $n + 2$ faces, or, si on rapproche légèrement B de C le long de (BC), (BCB'C') devient un trapèze, mais le quadrilatère (ABA'B') devient gauche avec 2 faces triangulaires (AA'B') et (AB'B). Le résultat est qu'on a autant de sommets mais une face de plus. On peut faire ceci pour toutes les faces de (P) autres que les bases. Si on le fait k fois [$0 \leq k \leq n - 2$], on aboutit à un polyèdre ayant $n + 2 + k$ faces, nombre compris entre $n + 2$ et $2n$. De plus ce polyèdre possède 2 faces quadrangulaires voisines.

- ou bien $S = 2n + 1$ et (C') équivaut à $n + 3 \leq F \leq 2n + 1$.

On sait d'après le cas précédent obtenir un polyèdre (P) ayant $2n$ sommets et $F - 1$ faces, dont 2 faces voisines sont des quadrilatères. Si on « tronque » le sommet X de (P), on augmente le nombre de faces et le nombre de sommets de 1, ce qui nous amène, pour les faces, de $n+2 \leq F-1 \leq 2n$ à $n+3 \leq F \leq 2n+1$ et, pour les sommets, de $2n$ à $2n+1$.

DEUXIÈME CAS : $S + 1 \leq F \leq 2S - 4$

Partons de la pyramide (P) de base un polygone à $2S - F - 1$ sommets. C'est possible puisque $2S - F - 1 \geq 3$. (P) a $2S - F$ sommets et $2S - F$ faces dont au moins 3 sont des triangles. Considérons l'opération W consistant à accoler à une face triangulaire de (P) un tétraèdre (suffisamment aplati). Dans W le nombre de sommets augmente de 1, et celui des triangles de 2. Itérons $F - S$ fois W [c'est possible puisque $F - S \geq 1$]. On arrive à un polyèdre (P') ayant $(2S - F) + F - S = S$ sommets et $(2S - F) + 2(F - S) = F$ faces. C Q F D

Michel Lafond continue son envoi par une très intéressante étude de la classification des polyèdres convexes suivant leur nombre de sommets et leur nombre d'arêtes ; elle fera l'objet d'un article spécifique dans un prochain bulletin.

Toujours à propos de cet AR 86, Jean Moreau de Saint Martin (Paris) fait remarquer qu'un heptaèdre est un polyèdre à sept faces, et non à sept arêtes.

La pyramide à base hexagonale est un heptaèdre homéomorphe à la sphère, orientable, convexe si la base l'est (7 faces, 7 sommets, 12 arêtes).

L'heptaèdre de Reinhardt, mentionné dans A. Delachet (*La géométrie contemporaine*, Que sais-je?) est non orientable, non convexe (7 faces, 6 sommets, 12 arêtes).

Le polyèdre de Szilassi, cité dans F. Le Lionnais (*Les nombres remarquables*, à propos de 7) est un heptaèdre homéomorphe au tore, orientable, non convexe (7 faces, 14 sommets, 21 arêtes).

Avis de recherche n° 87 : À qui est dû le théorème de l'excès sphérique (l'aire d'un triangle sphérique d'angles A, B, et C d'une sphère de rayon R est égale à $(A + B + C - \pi) R^2$) ?

Réponse de L.G. Vidiani (Dijon, 101702.425@compuserve.com)

Cette formule est due au mathématicien hollandais ALBERT GIRARD (1595-1632). On la trouve dans le dictionnaire PUF de Bouvier à la rubrique Girard, dans Lehmann et Bkouche, *Initiation à la géométrie*, p. 408 (PUF), mais elle était ainsi citée bien avant dans les ouvrages de spé (Robert Deltheil, *Nouveau cours de Mathématiques générales*, tome III *Applications*, page 122, Baillièrre éditeur, édition 1961) ;

En fait, c'est un cas particulier de la formule de GAUSS-BONNET : si T est un triangle tracé sur une surface, dont les cotés sont des géodésiques de cette

surface, d'angles A, B, C, alors l'intégrale de surface $I = \iint_T K ds$ où K est

la courbure totale, produit des deux courbures principales, est égale à $A + B +$

$C - \pi$ (par exemple, la courbure totale de la sphère est égale à $\frac{1}{R^2}$, celle du

plan euclidien à 0, celle du plan hyperbolique à -1). La valeur absolue de I est l'aire du triangle sphérique image de ABC par l'application « normale à la surface ».

Voir par exemple : Berger, *Géométrie*, section 18.3.8.6, tome 5 p. 44 (Nathan), et Berger, *Géométrie différentielle*, page 287 (Armand Colin).

J.P. Friedelmeyer (Strasbourg) a envoyé un article du n° 90 de la revue "L'Ouvert" (APMEP Alsace) décrivant l'histoire de ce théorème.

Jacques Verdier (j.verdier@ac-nancy-metz.fr) signale que Johann Friedrich LAMBERT (alsacien, 1728-1797), a démontré dans *La théorie des parallèles* (1766), en géométrie plane, hors 5^{ème} postulat d'Euclide, que l'excès « $A + B + C - \pi$ » est proportionnel à l'aire du triangle.

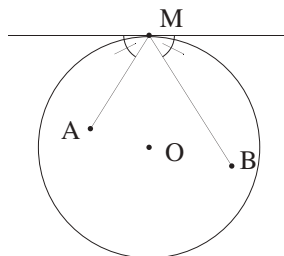
Avis de recherche n° 92

Problème du billard circulaire : peut-on construire, à la règle et au compas, le point M du trajet AMB reliant deux points A et B d'un disque, tel que M soit sur le cercle limitant le disque, trajet obéissant aux lois de la réflexion ?

Réponse de Jacques Bouteloup (Rouen).

Cette question fut célèbre sous le nom de problème d'Alhazen. Elle est évoquée dans l'ouvrage de Callandreau, *Célèbres problèmes mathématiques*, Albin Michel. L'ouvrage, paru en 1949, est évidemment épuisé (NDLR : il se trouve à la bibliothèque 3^{ème} cycle de Jussieu, et J.P. Friedelmeyer m'a envoyé la photocopie du texte). J'y puise les références historiques ci-après. Le premier ayant évoqué ce problème semble être le mathématicien et astronome arabe Alhazen. Il mourut en 1038, mais l'ouvrage où il l'évoquait ne fut traduit qu'en 1270 par Vitellio, et fut notamment utilisé par Képler. Ce problème fut en particulier étudié par Huyghens, Barrow, Riccati, Quételet.

O étant le centre du cercle (C) donné, la loi de la réflexion se traduit par le fait que \overrightarrow{MO} est bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. Mais \overrightarrow{MO} ne peut être bissectrice extérieure, car la bissectrice intérieure serait la tangente en M, A et B seraient dans des demi-plans distincts séparés par cette tangente, et l'un n'appartiendrait pas au disque. Les points O, A, B étant fixés, nous déterminons donc l'ensemble des points M tels que \overrightarrow{MO} soit bissectrice de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. Son intersection avec



(C) détermine les points M répondant à la question. Cet ensemble est une courbe célèbre appelée strophoïde, susceptible de nombreuses définitions géométriques.

Considérons un repère orthonormé d'origine O. Soient (a, a') et (b, b') les couples de coordonnées de A et B. L'hypothèse se traduit par la relation $2\theta = \theta_1 + \theta_2$ entre les angles de Ox avec MO, MA, MB. Désignant par t, t_1, t_2 les tangentes de ces angles, nous obtenons :

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{t_1+t_2}{1-t_1t_2}$$

Le remplacement de ces tangentes par leurs valeurs $y/x, (y-a')/(x-a), (y-b')/(x-b)$ conduit à l'équation de la courbe :

$$(x^2 + y^2)[(a' + b')x - (a + b)y] + (ab' + ba')(y^2 - x^2) + 2(ab - a'b')xy = 0$$

On obtient l'équation d'une cubique circulaire, avec point double en O, l'ensemble des tangentes en ce point, obtenu par l'annulation des termes de degré 2, représentant deux droites perpendiculaires. Ces propriétés caractérisent une strophoïde. Les tangentes en O, limites des droites OM, sont les bissectrices de (OA, OB), ce qu'on peut vérifier analytiquement. Il est intéressant également de montrer que la courbe passe par A et B.

Les points d'intersection de cette courbe et du cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ sont ceux de (C) avec l'hyperbole équilatère d'équation :

$$(ab' + ba')(y^2 - x^2) + 2(ab - a'b')xy + R^2[(a' + b')x - (a + b)y] = 0$$

Malheureusement, dans le cas général, les points d'intersection de deux coniques (au nombre de 0, 2 ou 4) ne sont pas constructibles avec la règle et le compas (même si l'une est un cercle !). **La réponse à la question posée dans l'avis de recherche est donc négative.** Mais il existe des cas particuliers rendant le problème possible. Voici deux cas simples :

- La droite AB passe par O. La prenant comme axe des x , nous avons $a' = b' = 0$. L'hyperbole dégénère en l'axe des x donnant deux solutions triviales, et une autre droite donnant éventuellement deux autres solutions.
- La médiatrice de AB passe par O. La prenant comme axe des x , nous avons $a = b, a' = b'$, et un résultat analogue au précédent.

Évidemment, ce n'est pas la solution d'Alhazen ! À son époque, on connaissait les coniques, mais pas la géométrie analytique.

Il est intéressant de revenir à notre strophoïde. Sa définition la plus usuelle (cissoïdale de cercle et droite) est obtenue à partir d'un cercle (Γ) passant par O, et d'une droite (D) diamètre de ce cercle. Une sécante variable issue de O coupant (Γ) et (D) en P et Q, c'est l'ensemble des points M tels que $\overline{OM} = \overline{PQ}$. En utilisant un repère orthonormé avec Ox perpendiculaire à (D), et en désignant par α, β les coordonnées du centre Ω de (Γ), nous obtenons l'équation :

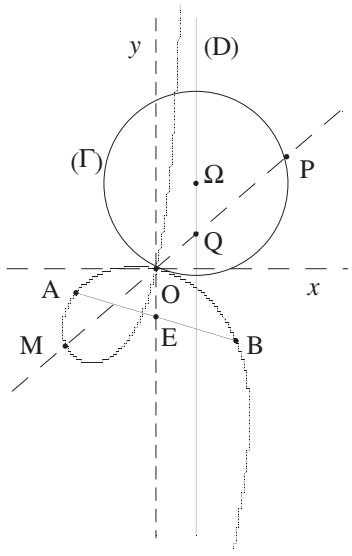
$$x(x^2 + y^2) + \alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy = 0$$

L'identification est immédiate, en supposant choisi l'axe des y initial passant par le milieu E de AB, d'où $b = -a$. On détermine alors

Ω par ses coordonnées : $\alpha = \frac{a(a' - b')}{a' + b'}$,

$$\beta = -\frac{a^2 + a'b'}{a' + b'}$$

La droite (D), parallèle à Oy, est donc parallèle à OE. On démontre que (D) est l'asymptote réelle de la courbe. Ainsi, OE est direction asymptotique.



Cette définition montre qu'on obtiendra des points M répondant à la question à partir de R. Faisant varier la pente de la sécante de ∞ à 0, puis croît de 0 à un maximum, décroît de ce maximum à 0, enfin croît de 0 à ∞ , ces résultats intuitifs pouvant être prouvés rigoureusement. On peut essayer de déterminer graphiquement ces solutions en faisant pivoter une règle graduée autour de O.

Ces résultats montrent qu'on obtiendra 4 solutions si $R < \mu$, 2 si $R > \mu$. Mais, en général, il n'est pas possible d'exprimer simplement μ en fonction de R . Sa détermination nécessite la résolution d'une équation de degré 4. On l'obtient par contre aisément lorsque la strophoïde est droite : $\mu = \frac{a^2 + a'b'}{a' + b'}$. Il est alors égal au rayon du cercle (Γ).

Pierre Renferme et Jean Moreau de Saint Martin ont envoyé des solutions plus élaborées, montrant l'impossibilité de la construction par la non

constructibilité des racines d'un polynôme irréductible de degré 4, dont nous parlerons dans le prochain bulletin.

Avis de recherche 94

Étant données deux coniques (Γ_1) , (Γ_2) d'un plan (P) , on cherche un point S et un plan (Q) tels que les cônes de sommet S , de directrices (Γ_1) , (Γ_2) , coupent (Q) selon deux cercles.

Réponse de Jean Moreau de Saint Martin.

La géométrie dans C^3 fournit aisément la solution.

Les deux coniques données ont quatre points communs A, B, C, D . Les deux cônes ont donc quatre génératrices communes. Deux de ces génératrices, par exemple SA et SB , coupent (Q) en ses points cycliques I et J . I et J étant à l'infini, (Q) est parallèle au plan SAB .

Réciproquement, considérant une paire (A, B) de points communs, et un plan (Q') passant par A et B , il existe dans (Q') deux points S répondant à la question : l'intersection de AI et BJ , et l'intersection de AJ et BI . Il n'y a plus qu'à leur associer les plans (Q) parallèles à (Q') .

Bien sûr, on veut de plus que S et (Q) soient réels. Cela implique :

- que l'intersection de (P) et (Q') , qui contient A et B , soit réelle ;
- que le milieu M de AB soit réel (intersection des diamètres conjugués de la direction de AB) ;
- que A et B sont imaginaires conjugués, à distance SM de M , M étant le projeté de S sur AB .

Revenons aux coniques données. Si leur intersection est entièrement réelle, il n'y a pas de solution réelle en S et (Q) .

Si cette intersection comprend deux points réels (distincts ou non) et deux points imaginaires conjugués, considérons la droite (réelle) qui joint ces derniers et qui contient leur milieu M . Alors S est un point d'un cercle ayant cette droite pour axe et M pour centre. (Q) est parallèle à cette droite et à SM . Si cette intersection comprend quatre points imaginaires, il faut considérer les paires de points conjugués. Chaque paire donne un cercle comme lieu possible de S , et la direction de (Q) découle du choix de S comme précédemment.

En conclusion, le problème est possible chaque fois que l'intersection des deux coniques données n'est pas entièrement réelle.

AR 95

Avis de recherche de situations où parait un défaut d'isotropie qui n'est présent dans aucune des données, mais qui l'est dans leur conjonction.

Réponse de Jean Moreau de Saint Martin.

Soit à relier avec le minimum de fil quatre bornes électriques placées aux sommets d'un carré. Il est bien connu que la solution utilise deux triangles d'angles 120° , 30° et 30° appuyés sur deux côtés opposés du carré. Elle ne respecte pas la symétrie du carré par rapport à ses diagonales.

