Durée : 2 heures

Baccalauréat STT ACA – ACC Polynésie septembre 2006

EXERCICE 1 **12 points**

Le nombre d'objets produits et vendus chaque jour par une entreprise est noté x. Le bénéfice, en euros, qu'elle en retire est donné par la formule suivante :

$$-x^2 + 90x - 1\,400.$$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par
$f(x) = -x^2 + 90x - 1\,400$.

Partie A étude du bénéfice

1. Vérifier que $f(x) = (x-20)(70-x)$.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$ dans l'intervalle $[0\,;\,100]$.
3. En déduire la quantité d'objets à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice.
4. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
5. étudier le signe de $f'(x)$ puis établir le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,100]$.
6. En déduire la quantité d'objets à produire pour obtenir un bénéfice maximum. Préciser la valeur du bénéfice correspondant.

Partie B : étude du coût total de production

1. Chaque objet est vendu 120 euros. On désigne par $R(x)$ la recette réalisée par la vente de x objets. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. On appelle $C(x)$ le coût total de fabrication de x objets. Vérifier que :
   $C(x) = x^2 + 30x + 1\,400$.
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$C(x)$	1 400	1 800	2 400					8 400	10 200	12 200	14 400

4. Sur un graphique, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction C. (Prendre 1 cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 000 unités sur l'axe des ordonnées.)
   Tracer également la droite Δ_{120} représentative de la recette R.
5. Indiquer sur le graphique la quantité d'objets à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice (on fera apparaître les traits de construction nécessaires à la lecture).

Partie C : Détermination du prix minimum de vente de chaque objet

On rappelle que le coût total de fabrication de x objets est donné par :
$C(x) = x^2 + 30x + 1\,400$. L'entrepreneur cherche à diminuer le prix de vente de chaque objet, initialement fixé à 120 euros.

1. On suppose que l'entrepreneur baisse ce prix à 80 euros.
   a. Quelle est alors l'équation de la droite, nommée Δ_{80}, correspondant à la recette de x objets vendus ?

b. Construire cette droite sur le même graphique que celui de la Partie B question 4.

c. Dans ces conditions, l'entrepreneur peut-il espérer réaliser un bénéfice ? Justifier.

2. Soit Δ_{min} la droite qui permet d'obtenir le prix de vente unitaire minimal sans que l'entreprise soit déficitaire.

Construire Δ_{min} sur le graphique précédent.

EXERCICE 2 **8 points**

Le 01/01/2006, un nouvel employé dans une entreprise se voit proposer deux formules pour l'évolution de son salaire mensuel : dans la formule A il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 20 euros ; dans la formule B, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 1,5 %.
Son salaire mensuel initial durant l'année 2006 est de 1 200 euros. On note u_n (resp. v_n) le salaire annuel selon la formule A (resp. B) durant l'année $2006 + n$.

1. Expliquer pourquoi, en 2006, on a : $u_0 = v_0 = 14\,400$.

2. Expliquer pourquoi, en 2007, on a : $u_1 = 14\,640$; $v_1 = 14\,616$.

3. Donner, en justifiant la réponse, la nature des deux suites étudiées. Préciser la raison pour chacune de ces deux suites.

4. Exprimer u_n et v_n, en fonction de n.

5. Calculer et comparer les deux formules en 2016 puis en 2026. (Arrondir les résultats au centime d'euro).

6. Cet employé partira à la retraite, au bout de 42 années complètes de travail dans cette entreprise. Il décide de calculer combien il aurait gagné d'argent dans toute sa carrière.

On appelle S_n et T_n les sommes des termes des deux suites étudiées, définies par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n.$$

Calculer combien l'employé aurait gagné dans toute sa carrière selon chacune des formules A et B.