

Concours ADVANCE ESME-EPITA-IPSA

4 mai 2019 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
 - Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
 - Pour chaque question :
 - Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
 - Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
 - Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
 - Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.
- Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.**

Questions obligatoires

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = 0$.
 - Si $2 \ln(a) + 1 > 0$ alors $a > \sqrt{e}$.
 - Sur $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est la fonction $x \mapsto \ln(x)$.
- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal d'origine O.
Pour tout point M du plan, l'affixe de M est noté z_M . A, B et C désignent trois points du plan distincts de O.
 - Si $Z = \frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$ alors $|Z| = \frac{1}{2}$ et $\arg(Z) = \frac{7\pi}{12} [2\pi]$.
 - Si $Z = -2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$ alors $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$.
 - Si les points A et B sont symétriques par rapport à O alors $Z_A = \overline{Z_B}$.
 - Si $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C|$ alors ABC est un triangle équilatéral.
 - Si $\arg(Z_A) = \pi + \arg(Z_B) [2\pi]$ alors O, A et B sont alignés.
- f est une fonction définie et dérivable sur un ensemble D.
 - Si $D = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$ alors $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$.
 - Si $D = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = (x^2 - x) e^{1/x}$ alors $f'(x) = e^{1/x} \left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{x} \right)$.
 - Si $D = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

d. $\int_0^1 \frac{4x}{x^2+1} dx = \ln(2).$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\pi) dx = 0.$

4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{1-x}$ et \mathcal{C}_f la courbe représentant f dans un repère orthonormal.

Soit d la droite d'équation $y = ex + 15$ et D la droite d'équation $y = x$.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

c. Pour tout réel x , $f'(x) = (1-x)e^{1-x}.$

d. Il existe une tangente T à \mathcal{C}_f qui est parallèle à la droite d .

e. \mathcal{C}_f est en dessous de la droite D sur $] -\infty ; 0[.$

5. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$ représentée par la courbe \mathcal{C} dans un repère orthonormal.

Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$, représentée par la courbe \mathcal{C}' .

a. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$

b. Pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = \frac{2\ln(x) - (\ln(x))^2}{x^2}.$

c. Pour tout réel x strictement positif, $\frac{g(x)}{2} = \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2.$

d. \mathcal{C} admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.

e. \mathcal{C} est au-dessus de \mathcal{C}' sur $\left] \frac{1}{e} ; +\infty \right[.$

6. Un magasin d'électroménager vend deux modèles de robot au même prix et de marques M_1 et M_2 .

Les deux robots ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi le robot M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs 20 % des clients ayant acheté un robot M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des robots précédemment cités et on choisit un client au hasard.

Soient A et B deux évènements indépendants d'un même univers Ω tels que $P(A) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,65$.

a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un robot M_2 de couleur noire est égale à $\frac{6}{25}.$

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un robot de couleur noire est égale à $\frac{6}{25}.$

c. Le client a choisi un robot de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est égale à $\frac{33}{50}.$

d. La probabilité de l'évènement B est égale à 0,5.

e. A et \bar{B} sont indépendants.

Questions à choisir

7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left((1 - e^x)^2\right)$ et \mathcal{C} la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) > 0$.
 - L'axe des abscisses est une asymptote de \mathcal{C} en $-\infty$.
 - Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 2 \ln(1 - e^x)$.
 - Pour tout $x \neq 0$, $(f(x) > 0)$ si et seulement si $x < 0$.
 - f est décroissante sur $] -\infty ; 0[$.
8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
On considère l'algorithme ci-dessous.

```

N est un entier, U est un réel
U ← 1; N ← 0;
Tant que (U ≤ 0 ou N = 0)
    U ← U/3 + N - 2
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher U
    
```

- $u_3 = -\frac{14}{27}$.
 - L'algorithme affiche la valeur de u_3 .
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 5 \implies u_n \geq n - 3)$.
 - (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_{n+1}) = \ln(v_n) - 1$.
- Si pour tout réel x , $f'(x) < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
 - (v_n) est une suite géométrique.
 - (v_n) est convergente.
 - La suite (t_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = (n^2 - 200)\sqrt{n}$ est décroissante.
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = +\infty$
10. f est une fonction définie sur \mathbb{R} .
- Si pour tout réel $x > 1$, $1 + \frac{1}{x} < f(x) < \frac{x^2 + x + 100}{x^2 + 1}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
 - Si $f(x) = 2x + 3 - \sin(2x)$ alors pour tout réel x , $f(x) \leq 2x + 2$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \sin\left(\frac{1}{2x}\right) = 1$.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3+2^n}{3+4^n} = 1.$

e. Si $0 < x < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(1-x)^n(1+x)^n] = +\infty.$

11. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal d'origine 0, on considère les points E et F d'affixes respectives $-2 + i$ et $2 + 4i$ et \mathcal{E} l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + 2 - i| = |z - 2 - 4i|.$

Pour tout point M du plan, l'affixe de M est notée $z_M.$

- a. Le point G d'affixe $3 - \frac{3}{2}i$ appartient à $\mathcal{E}.$
- b. \mathcal{E} est le cercle de diamètre [EF].
- c. Le triangle OEF est rectangle.
- d. Si $z_A = 2 - 3i, z_B = -26 + 18i$ et $z_C = -2,$ alors A, B et C sont alignés.
- e. Si $z_A = 3e^{2i\pi/3}$ et $z_B = 2e^{-5i\pi/6}$ alors le triangle OAB est rectangle.

12. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$

On considère les points suivants définis par leurs coordonnées : A(1 ; -1 ; 2), B(3 ; 3 ; 8), C(-3 ; 5 ; 4) et D(1 ; 2 ; 3).

On note d la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

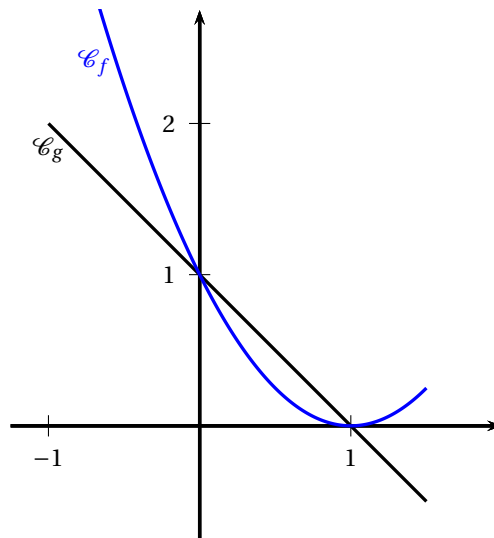
On note d' la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 + k \\ z = 4 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$

On note P le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0.$

- a. Le point C appartient à la droite $d.$
- b. Les droites d et d' sont parallèles.
- c. Le plan P contient la droite d et est orthogonal à la droite $d'.$
- d. Le triangle BCD est rectangle.
- e. On note P' le plan contenant la droite d' et le point A.

Un vecteur normal à ce plan est : $\vec{n}(3; -1; 2).$

13. On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = -x + 1$ représentées graphiquement par leurs courbes respectives \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_g.$



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

a. L'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g (pour $x \in [0; 1]$) est égale à $\frac{1}{6}$.

b. $\int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{2}{3}$.

c. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

e. $\ln\left(\frac{3}{2}\right) < \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx < \ln(2)$.

14. Le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,7.

Marc se rend à son travail à pied ou en bus. Dans la ville où il habite, il pleut un jour sur quatre. Lorsqu'il pleut, Marc se rend en bus à son travail dans 80 % des cas.

Lorsqu'il ne pleut pas, il se rend à pied à son travail dans 60 % des cas.

a. La probabilité qu'un client attende moins de 5 minutes à ce guichet est égale à $\frac{e^{3,5} - 1}{e^{3,5}}$.

b. Sachant qu'un client attend depuis 5 minutes, la probabilité qu'il attende au total plus de 10 minutes à ce guichet est égale à $e^{-3,5}$.

c. Marc prend le bus un jour sur deux.

d. Soient A et B deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient : $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,7$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,1$.

Alors la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\frac{14}{89}$.

e. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'intervalle $[1; +\infty[$ et dont la loi de probabilité admet comme densité la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x^3}$.

Alors $P(1 \leq X \leq 4) = \frac{15}{16}$.

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL DE L'ÉPREUVE MATHÉMATIQUES

(V)rai ou (F)aux

N°	A	B	C	D	E
1	V	V	F	F	F
2	V	F	F	F	V
3	V	V	F	F	F
4	F	V	V	V	V
5	F	V	F	V	F
6	V	F	F	V	V
7	F	V	F	F	V
8	V	F	V	F	V
9	F	V	V	F	F
10	V	F	V	F	F
11	V	F	V	V	V
12	F	F	F	V	V
13	V	F	V	V	V
14	V	V	V	F	V