Le petit mathémagicien

(Atelier A Da 1 de Dominique Souder)

(à l'école primaire, en sixième et en cinquième, comment, grâce à des tours simples et variés de magie mathématique, développer l'esprit scientifique et la créativité des enfants, tout en leur donnant confiance en eux)

Voici seulement une douzaine de tours, la place manquant pour en donner davantage nous vous renvoyons à la bibliographie en fin d'article.

Objets magiques et additions…

Prenons dix nombres différents dont la somme est 100.
Par exemple 5+6+8+9+11+7+10+13+15+16 = 100.

Partageons-les en deux paquets de cinq nombres, l'un qu'on note sur une ligne horizontale, l'autre qu'on note sur une colonne verticale, pour remplir les 25 cases de leur **table d'addition** avec les 25 sommes obtenues.

+	7	10	13	15	16
5	12	15	18	20	21
6	13	16	19	21	22
8	15	18	21	23	24
9	16	19	22	24	25
11	18	21	24	26	27

12	15	18	20	21
13	16	19	21	22
15	18	21	23	24
16	19	22	24	25
18	21	24	26	27

Coupons maintenant les bords du haut et de la gauche pour garder seulement les 25 cases. On obtient un objet magique avec lequel faire un tour de magie !

Le magicien dit à son ami spectateur qu'il va faire une prédiction qu'il écrit sur un bout de papier (il écrit 100). Le papier est plié et laissé sur la table. Le magicien propose au spectateur de placer 5 pions ou rondelles sur 5 cases de sa table magique en respectant la consigne suivante : il ne doit pas y avoir plus d'un pion par ligne, et pas plus d'un pion par colonne.

Quand le spectateur a fini il doit additionner les 5 nombres sur lesquels il a mis les pions. Exemple : (on a coloré les 5 cases choisies) 16+15+21+26+22 = 100.
Le magicien déplie son papier et prouve qu'il avait deviné le total.

Comment cela se fait-il ?

Chaque nombre choisi est la somme de deux des dix nombres de la table de départ. Le choix dans des lignes et colonnes différentes à chaque fois évite de reprendre les deux mêmes nombres parmi les dix, et oblige à prendre en tout les dix nombres de départ dont la somme est 100.
A vous d'inventer !

Vous pouvez changer la somme des nombres, et le nombre de nombres…
Vous pouvez réaliser une table d'addition magique avec de petits nombres (par exemple de 1 à 8) pour votre petit frère qui ne sait compter que jusqu'à 36 :

+	3	5	6	7
1	4	6	7	8
2	5	7	8	9
4	7	9	10	11
8	11	13	14	15

4	6	7	8
5	7	8	9
7	9	10	11
11	13	14	15

Bien sûr il vous faudra écrire pour prédiction 36 sur le papier.
A vous de jouer et d'imaginer !
Et si votre grand'mère fête bientôt ses 90 ans, construisez-lui une table de somme magique 90, cela lui fera plaisir…
Vous pouvez aussi construire des objets magiques de ce style utilisant la multiplication au lieu de l'addition…

Le sesquimètre de la couturière.

De nos jours les mamans ont rarement le temps de confectionner leurs robes après avoir réalisé un patron, mais toutes doivent avoir un ruban souple qu'on appelle un « mètre » ou un « centimètre » de couturière, gradué de 1 à 150 sur les deux faces, et qui en fait mesure 1,50 m. Il faudrait l’appeler « sesquimètre » car « sesqui » veut dire « un et demi ».

Le tour suivant nécessite deux spectateurs pourvus chacun d’un petit papier blanc, d’un crayon et d’un trombone, et bien sûr un « sesquimètre ».

Vous êtes le magicien, et vous proposez de faire un tour à deux de vos amis.

Vous inscrivez sur une feuille de papier le nombre 302 ; pliez la feuille, et placez-la en évidence sur la table en disant que vous faites une prédiction.

Demandez à votre premier ami de placer sur le « sesquimètre » son trombone à cheval, à l’endroit qu’il veut, et de noter sur son papier le nombre du ruban apparaissant sous la partie la plus longue du trombone. Demandez à votre deuxième ami de faire de même avec son trombone et son papier. Repassez le sesquimètre au premier ami et demandez-lui de noter le nombre qui apparaît de l’autre côté du trombone du deuxième ami (la partie la plus courte du trombone), sur l’envers du ruban. Repassez le sesquimètre au deuxième ami et demandez-lui de noter le nombre qui apparaît sur l’envers du trombone du premier ami. Demandez à vos deux amis de faire maintenant l’addition des deux nombres qu’ils ont chacun sur leur papier.

Prenez une feuille de papier, demandez à vos amis de dévoiler les deux résultats, d’écrire ces deux nombres et de les additionner (faire le total des deux totaux !).

Déployez votre prédiction : c’est le même total : 302 !

Comment avez-vous fait ?

- Observez sous un trombone les deux nombres écrits sur le ruban l’un sur l’extérieur, l’autre sur l’intérieur : la numérotation de 1 à 150 est inversée sur les faces intérieure et extérieure du ruban. Vérifiez que le total de deux nombres sur les faces opposées du ruban est toujours 151 (en cm) : 150+1=149+2=148+3=…= 60+91, etc.
- Deux trombones conduisent à additionner deux fois 151, donc à obtenir 302. Le croisement des nombres à ajouter (l’endroit de l’un des trombones, l’envers de l’autre) permet que tout le monde ne trouve pas 151, et que le « truc » du tour ne soit pas évident trop vite…

Les trois dés.

Le magicien propose à un ami d’empiler verticalement 3 dés (numérotés de 1 à 6), et de les cacher en les entourant par un emballage cylindrique de carton (par exemple le carton central d’un rouleau de papier toilette), ceci en cachette pendant que le magicien se retourne . Seul le nombre écrit sur la face supérieure de la pile reste visible. Le magicien fait face à son ami, et écrit une prédiction sur un bout de papier qu’il retourne.

Le magicien propose à son ami d’ajouter tous les nombres écrits sur les faces horizontales des trois dés sauf celui de la face supérieure qui est visible de tous et ne compte donc pas. Il y aura donc cinq nombres à additionner, une fois le carton cylindrique retiré.

Le total (à calculer de tête !) se révèle être le nombre prédit par le magicien…

Comment a-t-il fait ?

- Chaque dé est fabriqué de façon que le total de deux faces opposées est 7 (1+6=2+5=3+4). Additionner les six nombres de trois dés donne 7x3 = 21. Si vous enlevez de 21 le nombre visible sur le dessus de la pile, vous avez le total à prédire. Par exemple, si vous voyez un 4, il faut écrire sur le papier le résultat de 21-4 soit 17.
- Et si vous imaginiez maintenant un tour semblable avec quatre dés ? Comment trouverez-vous le total à prédire ? Je suis sûr que vous avez trouvé…

Les coordonnées.

Le magicien dispose en carré sur la table 25 cartes (5x5), faces visibles, en cinq rangées de cinq cartes chacune. Il demande à un spectateur de choisir de l’œil une carte et de lui dire dans quelle colonne elle se trouve. Il attribue mentalement un numéro à cette colonne, en comptant de 1 à gauche vers 5 à droite.

Le magicien ramasse les cartes par colonne de haut en bas, faces visibles, en commençant par la colonne de droite, en posant chaque carte au dessus de la précédente. Puis en posant dessus, après les cartes de la colonne de droite, celles de sa colonne voisine de gauche, etc. Gardant le paquet faces visibles, il redistribue les cartes faces visibles, une à une, en une ligne de 5 cartes, de gauche à droite, puis en une deuxième ligne en dessous, etc. jusqu’à avoir un nouveau carré de 25 cartes.

Il demande dans quelle colonne se trouve la carte choisie, et peut alors dire laquelle c’est. Il lui suffit de regarder dans cette colonne la carte qui se trouve à la rangée dont le numéro à partir du haut est celui de la colonne du début du tour.

La deuxième demande de colonne est en fait une demande de ligne par rapport à la première, et l’on obtient un couple de coordonnées permettant de trouver la carte choisie.

Par exemple, si la carte est au début dans la colonne 1, puis à la fin dans la colonne 4, la carte choisie est celle de la ligne 1 dans la quatrième colonne.

Les coordonnées de la carte choisie permettant de la repérer étaient (1,4).

Exercices :

Pouvez-vous inventer une fin originale à ce tour qui ne laisse pas penser que son « truc » est si simple, et le rallonge un peu… Pouvez-vous réaliser sur le même principe un tour avec 6x6 = 36 cartes, ou même avec 7x7 = 49 cartes ?

Les pièces cachées.

Tendez à un ami deux pièces , l'une de un euro, l'autre de deux euros. Votre ami place l'une en main droite, l'autre en main gauche, en cachette. Vous allez deviner dans quelle main est la pièce de un euro, et donc dans quelle autre main est la pièce de deux euros.

Pour cela, demandez à votre ami de compter 4 fois le nombre d'euros de sa main droite et d'ajouter 3 fois le nombre d'euros de sa main gauche. Demandez si le résultat est pair ou impair (ou se divise entièrement par 2 ou non).

Si le résultat est impair (11), la pièce de un euro est en main gauche, celle de deux euros en main droite.

Si le résultat est pair (10), la pièce de 1€ est en main droite, celle de 2€ en main gauche.

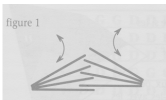
Exercice :

Compliquez le tour en donnant davantage d'argent : une somme impaire d'euros à mettre dans l'une des mains et une somme paire dans l'autre, et réfléchissez à sa solution.

Ne mentionnez pas les sommes que vous donnez à votre ami pour ne pas lui mettre la puce à l'oreille.

La ronde des cœurs

Le magicien annonce qu'il s'intéresse aux seuls cœurs du jeu de cartes, mais veut que celui-ci soit bien battu. Il coupe bien au milieu, et fait un mélange des deux moitiés « en queue d'aronde ». Un dessin valant lieux qu'un long discours, voilà ce dont il s'agit : le jeu est partagé en deux parties sensiblement égales qu'on prend dans chacune de nos mains, et on essaie d'enchevêtrer ces deux parties en les effeuillant avec vivacité…



Il recoupe bien dans le milieu, puis cherche les cœurs dans l'ordre où ils viennent depuis le haut du paquet. Il obtient roi,10, 7, 6, 3,dame, 9, 5, 1, valet, 8, 4, 2.

Les cartes sont rassemblées, faces cachées, avec le roi au dessus.

Le magicien dit qu'il va appeler chaque carte par son nom, et il commence à épeler a-s-d-e-c-o-e-u-r en faisant passer une à une, à chaque lettre, une carte du dessus vers le dessous du paquet .La carte correspondant au « r » est retournée : c'est bien sûr l'as de cœur. Le magicien continue d-e-u-x, le « x » donne le deux de cœur.

De même pour obtenir le trois et le quatre. Le magicien dit alors que le cinq de cœur est associé pour lui au mois de mai où, étant en cinquième, il a connu sa chérie, qui se prénomme Monique : il propose donc d'épeler m-o-n-i-q-u-e et sur le « e » retourne le cinq de cœur.

Pour changer il propose d'obtenir le six en comptant les cartes 1,2,3,4,5,6 et la carte correspondant au 6 est retournée, c'est le 6 de cœur. Même tactique pour avoir le 7 : on compte de 1 à 7. Le magicien propose enfin pour varier le plaisir du spectateur de revenir à l'épellation du nom, car les grands nombres deviennent fastidieux . On obtient h-u-i-t et le 8 et ainsi de suite jusqu'au r-o-i (roi).

Comment le magicien a-t-il fait ?

L'ordre des cartes doit être celui indiqué plus haut. Vous devez préparer le jeu. Le fait de couper et de mélanger comme indiqué plus haut ne fait pas se mélanger les cœurs entre eux, par contre ceux qui doivent se trouver en haut sont dans la deuxième moitié du paquet, c'est pourquoi il faut recouper après le mélange pour obtenir l'ordre voulu.

Vous pouvez adapter le tour à votre fantaisie .

Il suffit de dessiner un cercle avec 13 positions correspondant à vos 13 cartes, le départ (la carte du dessus du paquet) étant marqué.

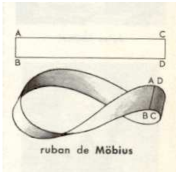
Tournez dans le sens des aiguilles d'une montre sur votre cercle : si vous voulez l'as de cœur, placez celui-ci en neuvième position car a-s-d-e-co-e-u-r fait neuf lettres. Si vous préférez « a-s » simplement mettez-le en deuxième. Continuez ainsi avec le nom de chaque carte que vous souhaitez (ou son surnom), en sautant bien sûr les positions du cercle qui sont déjà créditées d'une carte…

Vous pouvez aussi le faire en anglais… Toutes les preuves d'imagination et de fantaisie agrémenteront ce tour que j'aime particulièrement.

… Le ruban de Möbius et les deux anneaux devenant un carré…

Un marchand de ceintures dans une foire voit arriver un car de touristes et s'inquiète : va-t-il manquer de matériel ? Le magicien colle les deux extrémités d'un bande de papier représentant la ceinture, puis coupe au milieu de la largeur : il obtient deux ceintures au lieu d'une, et le marchand se prépare à faire des affaires en les vendant le même prix qu'avant !

Ensuite notre marchand voit un gros monsieur arriver, il faut une ceinture plus longue ! Le magicien colle les deux extrémités en ayant pris soin d'effectuer une torsion (on obtient un ruban de Möbius), puis effectue une découpe au milieu de la largeur. L'objet obtenu n'a qu'une face, on ne pourrait peindre par exemple de deux couleurs un intérieur et un extérieur, et sa longueur satisfait le gros monsieur.



Ne nous arrêtons pas là : comment réaliser une ceinture pour des frères siamois (présents dans la foire au stand des monstres), vous savez ces enfants hélas victimes d'une monstruosité naturelle qui les soude l'un à l'autre à la naissance par une partie de leur corps ? Il faut employer la même méthode que précédemment, mais on fait subir, cette fois, deux torsions à la ceinture d'origine. On obtient alors deux anneaux entrelacés.

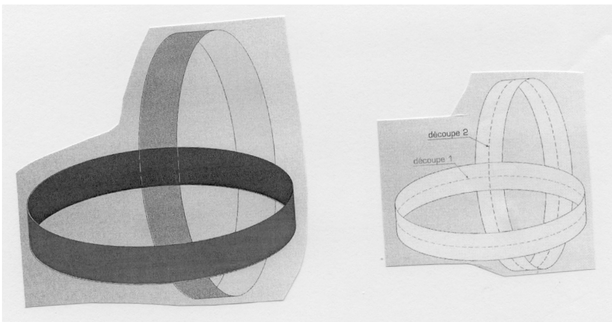
Le découpage magique.

Si vous avez conservé les deux ceintures de même taille obtenues après le découpage sans torsion préalable, vous pouvez les coller perpendiculairement pour obtenir une croix de deux anneaux circulaires. Le magicien peut alors lancer un défi au spectateur :

- pouvez-vous en deux coups de ciseaux transformer cet objet et obtenir un carré, sans qu'il y ait de papier perdu ?

La solution est proposée ci-dessous.

Les activités magiques que vous venez de faire relèvent d'une branche des mathématiques qu'on appelle la topologie : celle-ci s'intéresse à la forme des objets, sans se soucier de dimensions et de nombres.



Le 9 magique.

On dit qu'un nombre entier est « multiple de 9 » lorsque la division de ce nombre par 9 tombe juste et donne un nombre entier.

Pour savoir si une division par 9 va tomber juste, il y a un critère : il suffit de chercher si la somme des chiffres du nombre est elle-même un multiple de 9. Par exemple, au lieu de diviser 4 732 164 par 9, on calcule 4+7+3+2+1+6+4 = 27, et comme 27 est dans la table de 9, on peut affirmer que 4 732 164 est divisible par 9.

Si deux nombres sont multiples de 9, quand on les ajoute, les soustrait, les multiplie, les résultats sont aussi des multiples de 9.

Prenons un nombre qui n'est pas divisible par 9, par exemple 1758. Le reste de la division est 3. La somme des chiffres est 21, et le reste de sa division par 9 est le même nombre 3. Si on soustrait 1758-21= 1737, on obtient un multiple de 9. C'est un résultat général : si un nombre n'est pas multiple de 9, son reste dans la division par 9 est le même que celui de la division de la somme de ses chiffres par 9 ; et si on soustrait d'un nombre la somme de ses chiffres on obtient un multiple de 9.

Voici deux tours utilisant les propriétés du 9.

Les cartes et le nombre à quatre chiffres.

Le magicien, qui s'est tourné, demande au spectateur d'écrire un nombre de quatre chiffres en cachette, puis de lui ôter le total de ses quatre chiffres (le résultat sera donc un multiple de 9). Le spectateur doit alors choisir en cachette 4 cartes d'un jeu, ayant pour valeurs les quatre chiffres de son résultat, celui des unités dans la famille cœur, celui des dizaines à carreau, celui des centaines à trèfle, et celui des milliers à pique. (S'il y a un zéro, prendre une figure). Le magicien demande au spectateur de mettre une des quatre cartes à points dans sa poche, de poser les trois autres sur la table. Le magicien se retourne et annonce quelle est la carte cachée en poche.

Je suis sûr que vous avez compris : la famille (cœur, carreau, trèfle, pique) qui manque parmi les quatre se voit de suite ; quant à la valeur il suffit de se demander combien ajouter au total des trois cartes visibles pour obtenir un multiple de 9.(Si c'est déjà un multiple de 9, il manque un 9, ce ne peut être un zéro, car la carte en poche était « à points » et non une figure)

Papier, crayon et calculatrice…

Préparez un jeu de cartes en regardant quelle est la neuvième carte à partir du haut. Portez le jeu, un papier , un crayon, et une calculatrice à l'ami avec lequel vous voulez jouer.

Demandez à cet ami de choisir trois nombres consécutifs (comme 66, 67, 68), et d'en faire la somme (notre exemple : 201). Celle-ci sera égale à trois fois le nombre du milieu, mais ne le dites pas : vous venez de faire fabriquer un nombre multiple de 3. Demandez à votre ami de multiplier sa somme par elle-même (on dit « calculer son carré ») : vous obtenez un nombre multiple de 3x3 = 9, mais votre ami ne le sait pas (notre exemple : 40 401= 9x4489). Demandez maintenant à votre ami d'additionner les chiffres de son résultat, jusqu'à obtenir un nombre plus petit que dix : il va trouver 9 mais ne lui dites pas.

Faites-lui regarder et mémoriser la carte du jeu située à partir du haut à la position correspondant à son nombre. Il va regarder la neuvième, celle que vous connaissez. Vous pouvez lui faire battre le jeu et retrouver la carte choisie par tout moyen spectaculaire de votre invention.

A vous d'imaginer d'autres tours utilisant les propriétés du 9.

Carrés magiques et anniversaires…

Voici un carré magique de 4x4 = 16 nombres de 1 à 16 : il est facile à fabriquer, regardez… A partir du carré de gauche il suffit de croiser quatre couples de nombres (le 2 et le 15, le 3 et le 14, le 5 et le 12, le 8 et le 9) pour obtenir le deuxième carré. Dans celui-ci la somme de chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale est le même nombre : 34.

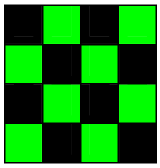
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Un tel carré est dit « magique de somme 34 ».

Colorions comme un damier une case sur deux du carré magique.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16



Quelle est la somme de huit nombres de même couleur ?

12+13+15+10+7+2+4+5 = 68 1+8+6+3+14+11+9+16 = 68

On trouve le double de la somme magique.

Peut-être avez-vous observé votre mère faire des travaux de couture avec du tissu en ***damier de deux couleurs*** *maintenant, par exemple le vert et le noir.*

Imaginons que ce damier est un morceau de tissu carré, dont l'envers serait blanc. Si nous le plions selon les lignes horizontales ou verticales parallèles aux côtés et séparant les 16 carrés, une case verte vient toujours se mettre au dessus d'une case noire et vice versa ; mais une couleur sera tournée vers le haut et l'autre vers le bas. Si le pliage est poursuivi jusqu'à ce qu' il n'y ait plus qu'une case carrée apparente, considérons la pile de 16 carrés formée : prenons des ciseaux et rognons les bords de façon à ce que les 16 carrés empilés puissent être séparés les uns des autres. Nous pouvons les soulever l'un après l'autre, et regarder les 16 faces apparentes : il y en aura huit de même couleur et huit qui seront blanches (les envers de l'autre couleur). Vérifiez-le, c'est une expérience sur ce qu'on appelle le principe de la parité.

Nous pouvons recommencer la même expérience en imaginant de plus que le tissu a subi certaines déchirures selon des lignes de séparation des carrés (horizontales ou verticales, de la longueur d'un ou plusieurs côtés de carré) mais qu'il est resté d'un seul tenant. Le pliage pour aboutir à un empilage sur la base d'un carré peut être encore plus varié et compliqué mais le résultat sera le même : huit carrés d'une même couleur seront visibles du dessus de la pile, et huit autres depuis le dessous.

Première idée de tour ***: votre grand'mère fête ses 74 ans****. Vous avez l'idée de lui faire un cadeau d'anniversaire : lui écrire un carré magique dont la somme de toutes les lignes, colonnes ou diagonales serait 74 :* vous ajoutez simplement 10 à tous les nombres du carré ci-dessus, donc 40 par ligne ou colonne ou diagonale. Peut-être alors votre grand père dira-t-il : « comment feras-tu pour ***me souhaiter mes 77 ans*** le mois prochain ? Vous répondrez : je n'ai qu'à ajouter 3 à une case par ligne, une par colonne, et une par diagonale et le tour sera joué. C'est ce qu'il faut faire pour la case 1 de la première colonne à gauche. Dans la deuxième colonne on évite la case du haut pour ne pas avoir deux augmentations sur la première ligne, et on évite aussi la case en dessous qui aurait augmenté la diagonale une deuxième fois. On choisit la troisième case à partir du haut. Après, comme on ne veut pas mettre en quatrième colonne la quatrième case qui serait embêtante pour la diagonale, on choisit la deuxième, et on met donc dans la troisième colonne la quatrième case augmentée.

Deuxième idée : après avoir écrit les nombres du carré magique sur un tissu blanc, le magicien fait sur un papier une prédiction : 68, qu'il cache. Il fait plier le tissu à un copain, avec d'éventuels découpages partiels, de façon à obtenir un empilement sur la base d'un seul carré, il fait couper à ras des bords, puis fait ajouter les nombres visibles. Il dévoile sa prédiction : c'est bien le même total de 68.

Si vous voulez échanger sur le sujet avec moi, ce sera avec plaisir :
dominique.souder@wanadoo.fr

Bibliographie :

*** par Dominique SOUDER :**

- **magie et maths, coédition ACL et Pentaèdre**
- **vive l'école des mathémagiciens, éd. Vuibert, à paraître**
- **le petit mathémagicien, éd. Gulfstream, à paraître (nov. 2006)**