Problèmes ouverts et narrations de recherche en TS

Michel Lacage (*)

1. Présentation de l'atelier

La pratique des narrations de recherche est aujourd'hui couramment admise dans les classes de collège, mais l'est-elle autant dans les classes de TS, lorsque la priorité est le programme à boucler ? Si les questions ouvertes ont fait leur apparition dans le programme officiel, n'est-ce pas en partie pour amener les élèves d'une classe à développer leur curiosité et à faire preuve d'initiative dans l'activité mathématique ?
Solliciter de ses élèves de TS la narration de leur recherche permet à l'enseignant de mathématiques d'inciter le plus grand nombre à se lancer dans la résolution d'un problème ouvert.

Quelles sont les modalités de mise en oeuvre de narrations dans une classe d'examen ?
S'il n'est évidemment pas possible que les élèves effectuent toutes les recherches en classe sous la conduite de l'enseignant, il est par contre souhaitable de consacrer quelques instants à une séance de questions-réponses, de manière à s'assurer d'une bonne compréhension de l'énoncé. A ce stade, aucune piste n'est ni évoquée, ni écartée par l'enseignant ; les élèves effectuent ensuite leur recherche à la maison.
Les quatre problèmes qui suivent, proposés à deux classes de TS du Grand Lycée franco-libanais de Beyrouth entre janvier et avril 2005, répondent aux objectifs suivants :

- mettre tous les élèves en activité.
- Leur donner envie de faire des mathématiques.
- Les inciter à se jeter à l'eau et à produire un écrit.
- Leur permettre de réinvestir plusieurs notions du programme de TS en dehors d'un contexte d'apprentissage direct.

Il est important de signaler qu'un problème ouvert peut aussi permettre d'appréhender une nouvelle notion ; par exemple, la découverte de la stratégie du jeu des tours de Hanoï avait permis d'introduire le raisonnement par récurrence dans ces mêmes classes, en début d'année.
Chaque sujet donné aux élèves doit être précédé de consignes leur précisant clairement ce que le professeur attend d'eux. Le contrat est ainsi pleinement assumé par les élèves, qui évitent la confusion entre un devoir surveillé type bac et une narration de recherche.

2. Exemples de problèmes ouverts

2.1 Consignes

Je vous propose un problème où vous aurez tous beaucoup de choses à m'écrire. Pourquoi ? Et bien tout simplement parce que je vous demande de ne pas vous contenter de me donner la réponse mais de me raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver. Vous me décrirez vos essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont abouti à rien. Toute mon attention ira sur la qualité et la persévérance de votre recherche. J'attacherai plus d'importance à la précision de cette narration qu'au résultat trouvé lui-même.
Racontez sur votre feuille les différentes étapes de votre recherche, les remarques, les aides, les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait changer de méthode ou qui vous ont permis de trouver. Donnez des précisions sur la durée et l'organisation de votre travail.

*IREM de Montpellier (michel.lacage@ac-montpellier.fr)

2.2 Enoncés

1. Les tours de Hanoï

Règle du jeu :
On dispose d'un socle sur lequel sont plantés 3 piquets. Au début du jeu, on enfile n rondelles trouées sur un des piquets ; les rondelles ont des diamètres décroissants.
On ne peut déplacer qu'une rondelle à la fois, pour la reposer sur l'un quelconque des 3 piquets. On peut poser une rondelle sur une plus grande, mais pas le contraire.
Le but du jeu est de déplacer les n rondelles sur un autre piquet.

Quel est le nombre minimum de déplacements ?

2. Polygones réguliers

On considère un polygone régulier à $2n$ sommets, $n > 1$.
On choisit au hasard 3 sommets du polygone.
Quelle est la probabilité que ce triangle ait 3 angles aigus ?

3. Polyèdres

Dans un tétraèdre régulier, la somme du nombre de sommets et de faces diminuée du nombre d'arêtes est égale à 2.
Ce résultat est-il généralisable à d'autres polyèdres ?

4. Distance minimale

Soit C la courbe représentative de la fonction *ln* dans un repère orthonormal d'origine O.
Pour quel(s) point(s) M de la courbe C, la distance OM est-elle minimale ?

3. Petite bibliographie

Bonafé F. – Chevalier A. – Combes M.C. – Deville A. – Dray L. – Robert J.P. – Sauter M. ; 2002 ; Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée. Co-édition IREM de Montpellier et APMEP.

IREM de Paris 7 ; 2002 ; Expériences de narration de recherche en mathématiques. Editions ACL.

4. La narration de recherche de Lara Tabet sur le problème des tours de Hanoï

Sujet : au choix, un problème parmi les deux suivants :

- les tours de Hanoï
- les polygones réguliers.

TABET LARA 1S1 Le 02/02/05

Evaluation formative : Narration de recherche

1 Les tours de Hanoï

Avec 3, 4, 5 et puis 6 disques, j'ai essayé de compter les mouvements nécessaires pour déplacer 1 ces disques d'un piquet jusqu'à un autre en respectant les règles du jeu et ceci pour essayer de trouver une conjecture ou du moins une piste.

3 → 7 $2n+1$?

4 → 15 vérifié

5 → 31 non vérifié.

Avec $n=5$, il faut un nombre supérieur à $2n+1$ pour déplacer toutes les rondelles sur un autre piquet. Et déjà, je ne suis pas sûre de trouver le nombre de mouvements minimum même si j'ai essayé plus de 5 fois et n'ai jamais obtenu moins de 31.

Sur 6 disques, ça va être encore plus difficile.

6 → 63.

Arrivée à un résultat duquel je ne pouvais rien tirer, j'ai décidé d'arrêter de répéter un grand nombre de fois le jeu pour chaque valeur de n et d'essayer plutôt de réfléchir.

Soit N le nombre minimum de déplacements.

Comme il fallait déplacer toutes les rondelles, $N > n$.

Comme toutes les rondelles devaient se déplacer deux fois au moins (à l'exception de la dernière), $N > n + 2(n-1)$

Oui

Mais je n'allais pas continuer le raisonnement indéfiniment, je décidai de me consacrer plutôt sur la façon avec laquelle j'opérais.

Je réalisai qu'en fait j'étais obligée de déplacer n-1 rondelles sur un unique piquet pour pouvoir changer la dernière rondelle de piquet, le troisième piquet s'étant retrouvé libre.

Me vint immédiatement l'idée d'une suite définie par récurrence. Et il me semblait qu'il s'agissait d'une somme puisque le nombre de déplacements augmentait lorsque n augmentait.

En fait, il ne me restait plus qu'à essayer d'exprimer en chiffres et en lettres ce que je devais faire à partir du moment que je déplaçais la dernière rondelle sur l'un ~~deux~~ autre piquet. Facile à dire mais difficile à faire!

Pour ce faire, je regardais pour commencer les chiffres obtenus dans le tableau du début. Il me semblait observer une certaine relation :

$U_{n+1} = 2U_n + 1$

J'essayais donc de l'expliquer.

U_n → déplacement de n rondelles sur un autre piquet

1 → déplacement de la dernière rondelle sur le troisième piquet

U_n → déplacement des n rondelles sur le piquet où l'on vient de poser la dernière rondelle

Tout cela semblait assez logique :

Soit (U_n) la suite telle que :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$$

LE TRAVAIL A DÛ ME PRENDRE 1 HEURE AU MAXIMUM MAIS C'ÉTAIT VRAIMENT UN TRAVAIL RAPIDE ET INTENSIF. J'AVAIS TOUT LE TEMPS CETTE PILE DE 6 LIVRES A MES COTES ET CETTE MÊME FEUILLE DEVANT MOI, ET BIEN ENTENDU MA REFLEXION. J'AI REALISE QUE L'IMPORTANT ETAIT DE ~~[illegible]~~ COMPRENDRE CE QUI NOUS ETAIT DEMANDE ET DE SUIVRE LES MANOEUVRES ENTREPRISES. IL S'AGISSAIT DE TROUVER LES 3 PRINCIPALES ETAPES DU JEU ET DE SAVOIR LES ETABLIR EN CHIFFRES ET LETTRES.
J'AI CHOISI CET EXERCICE PARCE QUE NOUS AVONS RÉSOLU LE SECOND PENDANT LA PREPARATION AU CONCOURS GENERAL. JE N'AI PAS UTILISE DE BROUILLON ET N'AI PAS DEMANDE D'AIDE.

TABET LARA 1S1 le 02/02/05

Raya m'a à un moment appelé pour me demander si l'explication théorique suffisait pour donner l'expression de la suite trouvée. Je lui ai répondu que je croyais que oui et que je ne voyais pas d'aplication mathématique possible.

Elle me demanda ensuite si une expression de la suite par récurrence répondait véritablement à la question. Je lui ai donc rappelé le point méthode distribué au cours du premier trimestre et où on créé une suite géométrique (V_n) telle que

$$V_n = U_n - \frac{1}{1-2} = U_n + 1$$

$V_0 = 1$
$V_1 = 2$
$V_2 = 4$
$V_3 = 8$

(V_n) est donc une suite géométrique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

$V_n = 2^n$

Par suite, (U_n) peut être définie par $U_n = 2^n - 1$.