∾ Baccalauréat mathématiques septembre 1957 ∾
A. E. F. Antilles, Maroc et Togo

I. 1^er^ sujet

Variations et représentation graphique de la fonction

$$y = 1 - x^2.$$

Calculer l'aire du domaine limité par le segment $(-1\ ;\ +1)$ de l'axe Ox et l'arc de la courbe précédente joignant les extrémités de ce segment.

I. 2^e^ sujet

Variations et représentation graphique de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 + 13x - 7}.$$

I. 3^e^ sujet

Résoudre et discuter le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2(m+2)x + (m+1)y & = & 1, \\ mx + (m+1)y & = & m+5, \end{array}\right.$$

où m est un paramètre.

II.

Soient (O) un cercle de centre O et de rayon R situé dans un plan (P) et S un point n'appartenant pas au plan (P).
On désigne par I la projection orthogonale de S sur le plan P et l'on pose OI $= d$,
SI $= h$.

1. Étant donnée une droite quelconque du plan (P), on désigne par M et H respectivement les projections orthogonales de O et I sur cette droite.
   Établir que l'on a toujours

   $$2\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{IH}} = \mathrm{OM}^2 + \mathrm{IM}^2 - d^2$$

   et que, lorsque la droite considérée coupe le cercle (O) en deux points A et B, on a

   $$\mathrm{SA}^2 + \mathrm{SB}^2 - \mathrm{AB2} = 2\left[2\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{IH}} - \left(\mathrm{R}^2 - d^2 - h^2\right)\right].$$

   On appelle droite (Δ) une droite du plan (P) qui coupe le cercle (O) en deux points A et B tels que AB est vu de S sous un angle droit.
   Démontrer que, pour qu'une droite du plan (P) soit une droite (Δ), il faut et il suffit que

   $$2\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{IH}} = \mathrm{R}^2 - d^2 - h^2.$$

2. Trouver le lieu (ω) des points M et H relatifs aux droites (Δ).
   À quelle inégalité doivent satisfaire R, d et h pour qu'il existe effectivement des droites (Δ) ?
   On suppose cette inégalité satisfaite. Montrer que, sauf dans un cas particulier, les droites (Δ) sont toutes tangentes à une même conique, que l'on déterminera ; que peut-on dire des droites (Δ) dans le cas particulier exceptionnel ?
   À toute droite (Δ) on fait correspondre le point C où le plan (P) est percé par la perpendiculaire en S au plan déterminé par les trois points S, A, B. Trouver le lieu (Ω) du point C.

3. Pour que (Ω) coïncide avec (O) il faut et il suffit que R, d et h satisfassent à une relation, que l'on établira.

Montrer que I est alors un point remarquable du triangle ABC.

Montrer que, s'il existe un trièdre trirectangle de sommet S dont chacune des arêtes rencontre le cercle (O), il existe alors une infinité de tels trièdres.