Baccalauréat Série mathématiques et technique
A. E. F Antilles, Cameroun, Guyane et Togo juin 1958

EXERCICE 1

1er sujet. - Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0.
On envisagera les trois cas suivants :

1. x est exprimé en radians ;
2. x est exprimé en degrés ;
3. x est exprimé en grades.

Dérivée de $y = \sin(ax+b)$, l'arc $ax+b$ étant mesuré en radians.

2e sujet. - Établir entre les éléments d'un triangle ABC les relations abc

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{a}{\sin \text{A}} = \dfrac{b}{\sin \text{B}} & = & \dfrac{c}{\sin \text{C}}\\ \text{A}+\text{B}+\text{C} & = & \pi.\end{array}\right.$$

Réciproquement, six nombres a, b, c, A, B, C vérifiant les relations de ce système sont-ils les mesures des côtés et des angles d'un triangle ABC ?

3e sujet. - Résolution de l'équation trigonométrique

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

Exposer l'une des méthodes de résolution.
Application : $3\cos x + \sqrt{3}\sin x = 3m$.
Discuter (par rapport à m).

EXERCICE 2

1. On considère un cercle (Γ) de centre 10 et une droite (D) ayant en commun avec le cercle (Γ) deux points A et B. Ces deux points pourront être, exceptionnellement, confondus ; la droite (D) sera alors tangente au cercle (Γ).

   Soit un cerclé (C) variable, de centre M, tangent à (D) et orthogonal à (Γ).

   Montrer, en utilisant une inversion convenablement choisie, qu'il reste aussi tangent à un cercle fixe (F) (de centre F), que l'on précisera.

   Préciser la courbe (P) sur laquelle varie son centre M.

   Montrer que le cercle (Γ) et la courbe (P) sont tangents en A et B.
2. Inversement, soient une parabole (P) et une droite (D) perpendiculaire à l'axe de (P) et ayant en commun avec cette courbe deux points A et B [pouvant être, exceptionnellement, confondus au sommet de (P).

   Montrer que tout cercle (C) de centre M tangent à (D) et centré sur (P) reste tangent à un cercle fixe, puis montrer que ce cercle (C) reste orthogonal à un cercle (Γ) fixe tangent à (P) en A et B.

   En déduire une propriété caractéristique de tout point M d'une parabole au moyen d'une relation entre sa distance à une droite (D) et sa puissance par rapport à un cercle (Γ).

3. Trouver sur la figure précédente un segment égal au paramètre p de (P).

En déduire la construction d'un cercle bitangent à une parabole (P), connaissant son centre ω sur l'axe de (P). On appellera ω_0 le point limite du lieu de ω pour lequel la construction est possible et (Γ_0) le cercle (Γ) de centre ω_0.

Quel est le rayon de (Γ_0) ? Quelle est la droite (D) correspondante, que l'on appellera (D_0) ?

4. On se propose de construire les cercles bitangents à une parabole (P) qui passent par un point N donné.

Ces cercles, centrés sur l'axe de (P), passent aussi par le point N$'$ symétrique de N par rapport à l'axe de (P).

Les cercles cherchés touchent P en des points qui sont groupés 2 par 2 sur des perpendiculaires à l'axe, dont on précisera la position en utilisant la propriété caractéristique trouvée au 2.

Montrer que, pour que le problème soit possible, il faut que N soit intérieur à la parabole (P) et que, dans ce cas, il y a au moins une solution.

Montrer enfin qu'il y en a deux si, de plus, (P) est extérieur à (Γ_0).