Corrigé de l'exercice 1.

Partie 1

- 102 est étranche, car 10 est divisible par 2 et 102 par 3 ;
- 1 024 est étranche car il est divisible par 4, et que 102 est étranche.
- 10 240 est étranche car il est divisible par 5, et que 1 024 est étranche.
- 102 404 et 10 204 041 ne sont pas étranche, car 102 404 n'est pas divisible par 6.
- 326 3 268 et 326 804 ne sont pas étranche, car 326 n'est pas divisible par 6.
- 2 041 et 20 410 ne sont pas étranche, car 2 041 n'est pas divisible par 4.
- 705, 7 052, 70 520 et 705 204 sont étranches, mais 7 052 046 n'est l'est pas.
- 9 222 467 n'est pas étranche, car 922 n'est pas divisible par 3.

Nombres étranches à 2 ou 3 chiffres

1. Les étranches de 2 chiffres sont les pairs. Il y a 9 dizaines, et 5 pairs par dizaines, donc $9 \times 5 = 45$.

2. **a.** Les restes possibles dans la division par 3 sont 0, 1 et 2.

b. $\overline{n_1 n_2}$ est un multiple de 3 pair, c'est-à-dire un multiple de 6. Alors $n = \overline{n_1 n_2 n_3}$ peut s'écrire $n = 60k + n_3$. Donc, n_3 est l'un des chiffres : 0, 3, 6 et 9.

c. $\overline{n_1 n_2} = 3k + 1$, donc $n = 30k + 10 + n_3$, donc $10 + n_3$ doit être un multiple de 3, donc n_3 peut valoir 2, 5 et 8.

$\overline{n_1 n_2} = 3k + 2$, donc $n = 30k + 20 + n_3$, donc $20 + n_3$ doit être un multiple de 3, donc n_3 peut valoir 1, 4 et 7.

d. Il y a 15 nombres pairs, multiples de 3, donc on peut construire $15 \times 4 = 60$ étranches de 3 chiffres.

Il y a 15 nombres pairs, de reste 1 par la division par 3, donc on peut construire $15 \times 3 = 45$ étranches de 3 chiffres.

Il y a 15 nombres pairs, de reste 2 par la division par 3, donc on peut construire $15 \times 3 = 45$ étranches de 3 chiffres.

Au total, il y a $60 + 45 + 45 = 150$ nombres étranches de 3 chiffres.

e. Il y a 15 nombres qui se termine par 0, 15 par 2, 15 par 4, 15 qui se termine par 6 et 15 par 8. Au total, 75 nombres étranches pairs de 3 chiffres.

3. On obtient le tableau 1

4. Si $n = 621$ la variable compteur est égale à 1.

5. Si $n = 622$ la variable compteur est égale à 0.

6. Cet algorithme détermine si un nombre de 3 chiffres est étranche.

i	m	c
0	62	1
1	621	2

Table 1

Dénombrement des nombres étranches à quatre et cinq chiffres

1. **a.** $\overline{n_1n_2n_3n_4} = 100\overline{n_1n_2} + \overline{n_3n_4} = 4K + \overline{n_3n_4}$.

   b. On en déduit immédiatement que n est multiple de 4 si $\overline{n_3n_4}$.

   c. Il y a 25 multiple de 4 dans une centaine et 19 centaine entre 1 000 et 9 999.

   d. On reprend les nombres étranches de 3 chiffres. Il y a 3 cas suivant que le reste de la division de $\overline{n_1n_2}$ par 3.

   - $\overline{n_1n_2}$ pair, et le reste de la division par 3 est 0. Les étranches se finissent alors par 00, 04, 08, 32, 36, 60, 64, 68, 92 et 96. Il y a 15 possibilités pour $\overline{n_1n_2}$, soit 15×10.
   - $\overline{n_1n_2}$ pair, et le reste de la division par 3 est 1. Les étranches se finissent alors par 20, 24, 28, 52, 56, 80, 84 et 88. Il y a 15 possibilités pour $\overline{n_1n_2}$, soit 15×8.
   - $\overline{n_1n_2}$ pair, et le reste de la division par 3 est 2. Les étranches se finissent alors par 12, 16, 40, 44, 48, 72 et 76. Il y a 15 possibilités pour $\overline{n_1n_2}$, soit 15×7.

   On a donc $15(10 + 8 + 7) = 15 \times 25 = 375$.

2. Pour chaque étranche à 4 chiffres, il y a deux étranches à 5 chiffres. Donc, il y 750 étranches à 5 chiffres.

Corrigé de l'exercice 2.

Siutation 1

1. **a.** Le programme joue de manière aléatoire de façon équiprobable. On en déduit que $p_1 = p_2 = p_3 = \dfrac{1}{3}$.

   b. En mode novice, le joueur lance sa grenade de façon équiprobable : donc $q_1 = q_2 = \dfrac{1}{2}$.

   c. On a $p_1 + p_2 = \dfrac{2}{3}$ de toucher l'androïde.

d. On gagne si la grenade arrive dans l'intervalle A_i et que l'androïde se situe derrière le rocher i où $i+1$. Soit : On en déduit que la probabilité de gain est :

$$p_1q_1 + p_2q_1 + p_2q_2 + p_3q_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. **a.** Voir 2.

		A_1	A_2	A_3
Rocher	1	G	P	P
	2	G	G	P
	3	P	G	G
	4	P	P	G

Table 2: *Tableau à compléter*

b. voir 1

c. Pour tous les intervallles, il y a autant situation de gains que de pertes.

3. La probabilité de gagner pour tout intervalle est de $\frac{2}{n}$.

4. **a.** On devrait être aux environs de $\frac{1}{2}$, or les fréquencess de gain $f(A_1) \approx 0,43$, $f(A_2) \approx 0,28$, $f(A_3) \approx 0,28$ et $f(A_4) \approx 0,42$.

b. p doit vérifier $2p + p + p + p + 2p = 1$, soit $7p = 1$, donc $p = \frac{1}{7}$

c. Les probabilités de gain sont $p(A_1) = p(A_4) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \approx 0,428$, $p(A_2) = p(A_3) = \frac{2}{7} \approx 0,285$. Les valeurs théoriques sont bien plus proche de résultats expérimentaux.

Situation 2

1. La probabilité de gagner lorsque le tir arrive en A_1 est la probabilité que l'humanoïde soit derrière le rocher 1 ou 2, multiplier par la probabilité que la grenade arrive en A_1. Soit $\frac{2}{n+2}q_1 + \frac{1}{n+2}q_1 = \frac{3}{n+2}q_1$. De même pour A_2. soit $\frac{2}{n+2}q_2$. On veut que ces probabilités soient égales, on a donc :

$$\frac{3}{n+2}q_1 = \frac{2}{n+2}q_2.$$

2. On aurait de la même manière, $\frac{2}{n+2}q_2 = \frac{2}{n+2}q_3$, donc $q_3 = q_2$. Et de proche en proche $q_i = q_2$, pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$. Et $\frac{2}{n+2}q_{n-2} = \frac{3}{n+2}q_{n-1}$, d'où $q_1 = q_{n-1}$. On en déduit, comme la somme des q_i vaut 1, que :

$$2q_1 + (n-3)q_2 = 1.$$

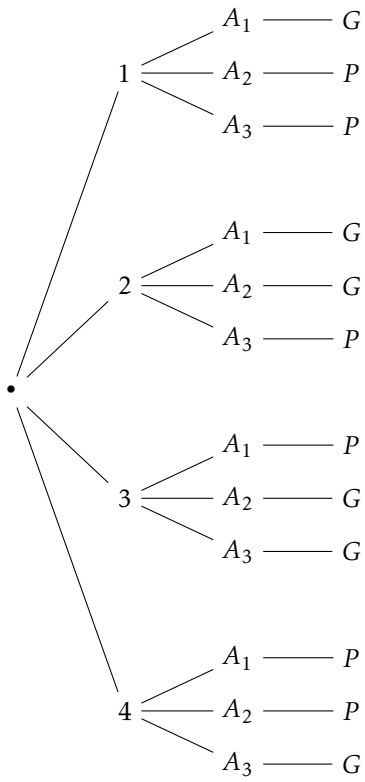

FIGURE 1: *Arbre à compléter*

3. On a donc :

$$\begin{cases} 3q_1 & = 2q_2 \\ 2q_1 + (n-3)q_2 & = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} q_2 & = \frac{3}{2}q_1 \\ 2q_1 + \frac{3n-9}{2}q_1 & = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} q_1 & = \frac{2}{3n-5} \\ q_2 & = \frac{3}{3n-5} \end{cases}$$

4. On choisit q_1 et q_2 avec les probabilités précédentes.

Corrigé de l'exercice 3.

1.

2. Par exemple, 43 et 67. $43 + 67 = 34 + 76 = 110$.

On a $n_1 = 10d_1 + u_1$ et $n_2 = 10d_2 + u_2$, le renversé de n_1 est $N_1 = 10u_1 + d_1$ et celui de $N_2 = 10u_2 + d_2$.

- Si $n_1 + n_2 = N_1 + N_2$ alors $10(d_1 + d_2) + u_1 + u_2 = 10(u_1 + u_2) + d_1 + d_2$, soit $9(d_1 + d_2) = 9(u_1 + u_2)$, soit $d_1 + d_2 = u_1 + u_2$.
- Si $d_1 + d_2 = u_1 + u_2$, alors $n_1 + n_2 = 10(d_1 + d_2) + u_1 + u_2 = 10(u_1 + u_2) + d_1 + d_2 = N_1 + N_2$.

3. **a.** Par exemple, 123 et 715. La somme vaut 838 et la somme des renversés 321 et 517 donne aussi 838.

b. $n_1 = 100c_1 + 10d_1 + u_1$, $n_2 = 100c_2 + 10d_2 + u_2$; les renversés sont $N_1 = 100u_1 + 10d_1 + c_1$ et $N_2 = 100u_2 + 10d_2 + c_2$

- Si $n_1+n_2 = N_1+N_2$, alors $100(c_1+c_2)+10(d_1+d_2)+(u_1+u_2) = 100(u_1+u_2)+10(d_1+d_2)+(c_1+c_2)$. D'où $99(c_1+c_2) = 99(u_1+u_2)$, donc $c_1+c_2 = u_1+u_2$.
- Réciproquement, on a $c_1 + c_2 = u_1 + u_2$. Alors, $n_1 + n_2 = 100(c_1 + c_2) + 10(d_1 + d_2) + (u_1 + u_2) = 100(u_1 + u_2) + 10(d_1 + d_2) + (c_1 + c_2) = N_1 + N_2$.

4. **a.** $3\,141 + 2\,034 = 5\,175$ et $1\,413 + 4\,302 = 5\,715$. La propriété de Sophie est donc fausse. On constate que ce sont des renversé l'un de l'autre.

b. 3 124 et 2 871. La somme vaut 5 995 et la somme des renversés est : $4\,213 + 1\,782 = 5\,995$.

c. La propriété qui assure que la propriété est vraie pour des nombres de quatre chiffres est : « La somme de deux nombres entiers à quatre chiffres n_1 et n_2 (non multiples de 10) est égale à la somme de leurs renversés si la somme des chiffres des milliers est égale à la somme des chiffres de leurs unités et la somme des centaines est égale à la somme des dizaines. »

5. Pour les nombres à 5 chiffres, la proposition est : « La somme de deux nombres entiers à cinq chiffres n_1 et n_2 (non multiples de 10) est égale à la somme de leurs renversés si la somme des chiffres des dizaine de milliers est égale à la somme des chiffres de leurs unités, et la somme des milliers est égale à la somme des dizaines. »

6. Soit d et u les chiffres des dizaines et des unités du nombre n. On en déduit les contraintes suivantes :

- n est impair, donc u est 1, 3, 5, 7, ou 9.

- d est donc 5, 6, 7, 8.
- $n+N = 11(d+u)$, N étant le renversé de n. Don, $n+N$ vaut 55, 66, 77 ou 88. Mais la somme est pair donc, $d+u$ vaut 6 ou 8.

Si $d+u = 6$, alors $d = 5$ et $u = 1$, mais $51 < 54$, donc ce cas n'est pas possible.
Si $d+u = 8$, alors :

- $d = 5$ et $u = 3$, mais $53 < 54$, donc impossible.
- $d = 6$ et $u = 2$, mais 62 est pair, donc impossible.
- $d = 7$ et $u = 1$, $n = 71$ et $N = 17$, et la somme vaut bien 88.

Le nombre cherché est donc 71.

Corrigé de l'exercice 4.

1. Une fonction parabole est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- L'origine du repère se situe à l'endroit du coup-franc, donc $f(0) = 0$ ce qui entraîne $c = 0$.
- On a $f(26) = 2$, donc $26^2a + 26b = 2$, soit $26a + b = \dfrac{2}{26}$. On tire alors $b = \dfrac{2}{26} - 26a$.
- Enfin, on doit avoir $f(9,5) \geqslant 1,85$, en prenant $f(9) = 2$, on doit respecter cette contrainte.
  $9^2a + 9b = 2$, soit $9a + b = \dfrac{2}{9}$. $9a + \dfrac{2}{26} - 26a = \dfrac{2}{9}$. On tire que $a = -\dfrac{1}{117}$ et $b = \dfrac{35}{117}$.

Une des fonctions possibles est : $-\dfrac{1}{117}x^2 + \dfrac{35}{177}x$. Il y en a d'autres.
Le graphique 2 permet une vérification a posteriori du respect des contraintes.

2. Le maximum est atteint en $-\dfrac{b}{2a}$, soit en $\dfrac{35}{2} = 17,5$. Le maximum vaut : $f(17,5) = \dfrac{35^2}{4 \times 117} \approx 2,61\,\text{m}$.

3. On a toujours $b = \dfrac{2}{26} - 26a$ et $-\dfrac{b}{2a} = 17$. On en déduit que $a = -\dfrac{1}{104}$ et $b = \dfrac{17}{52}$.
On a bien $g(9,5) \approx 3 > 2,20$.

4. On obtient l'algorithme :

Corrigé de l'exercice 5.

M	A	R	I	A	M
1	2	3	4	2	1

M	I	R	Z	A	K	H	A	N	I
1	5	3	6	2	7	8	2	9	5

Corrigé de l'exercice 6.

Corrigé de l'exercice 7.

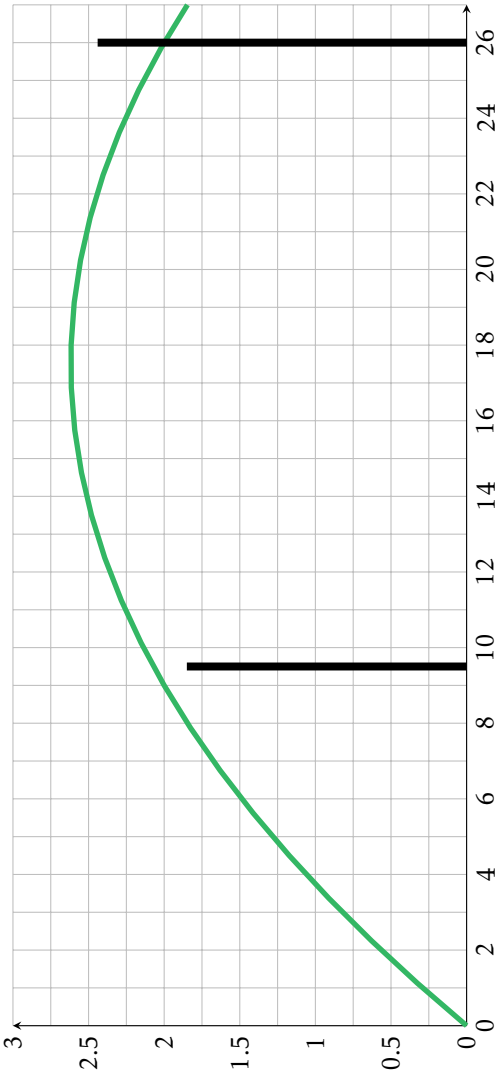

Figure 2

```
Données : Saisir a, b et c
si x == 9.5 alors
    si ax^2 + bx + c > 2 alors
        renvoyer VRAI
    sinon
        renvoyer FAUX
    fin
sinon
fin
si x == 26 alors
    si 2 ⩽ 26^2 a + 26b + c < 2,442 alors
        renvoyer BUT
    sinon
        renvoyer PAS BUT
    fin
sinon
fin
```

2	7	6	4	3	1	9	8	5
3	1	5	9	8	7	4	6	2
9	8	4	2	5	6	3	7	1
4	5	8	3	6	2	1	9	7
1	3	9	8	7	4	2	5	6
6	2	7	5	1	9	8	4	3
5	9	1	7	4	3	6	2	8
7	6	2	1	9	8	5	3	4
8	4	3	6	2	5	7	1	9

Figure 3

1. Une recherche systématique avec un tableur ou un programme, permet de dire qu'il faut 71 jours pour dépasser les trois mille milliards de milliards,

soit 3×10^{21}.

```
RN = 4
NG = 25
RG = 2
cpt= 1
print("    Jour   | Rouge/noir | Noir/Gris | Rouge/Gris")
print("Jour {0:2} | {1: 23} | {2: 23} | {3: 23}".format(cpt,RN,NG,RG))
while RN < 3e21:
    RN = 2*RN
    NG = 2*NG
    RG = 2*RG
    cpt = cpt+1
    print("Jour {0:2} | {1: 23} | {2: 24} | {3: 23}".format(cpt,RN,NG,RG))
```

Ce qui donne le résultats suivants :

```
Jour  | Rouge/noire | Noire/Grise | Rouge/Grise
Jour  1 |                    4 |                   25 |                    2
Jour  2 |                    8 |                   50 |                    4
Jour  3 |                   16 |                  100 |                    8
...                        ...                    ...                      ...
Jour 66 |   147573952589676412928 |   922337203685477580800 |   737869762948382064 64
Jour 67 |   295147905179352825856 |  1844674407370955161600 |   1475739525896764129 28
Jour 68 |   590295810358705651712 |  3689348814741910323200 |   2951479051793528258 56
Jour 69 |  1180591620717411303424 |  7378697629483820646400 |   5902958103587056517 12
Jour 70 |  2361183241434822606848 | 14757395258967641292800 |  11805916207174113034 24
Jour 71 |  4722366482869645213696 | 29514790517935282585600 |  23611832414348226068 48
```

2. Il y a donc $442/26 = 17$ jours.
3. La solution est donc 1771 ou 7117.
4. Le nom qui apparaît est parovirose.

Corrigé de l'exercice 8.

Le nombre d'élèves N est compris entre $25 \times 25 = 625$ et $25 \times 30 = 750$.
La somme du rang dans l'ordre croissant et du rang dans l'ordre décroissant vaut $N + 1$.
On cherche donc les nombres de la forme abc (a, b, c des chiffres entiers consécutifs) tels que $abc + cba$ soit compris entre 626 et 751.
$123 + 321 = 444$; $234 + 432 = 666$; $345 + 543 = 888$. Il y a donc 666 élèves dans le lycée de Ada.