∽ Baccalauréat A. O. F. & Antilles 1950 ∾

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

1er sujet - Résoudre l'équation

$$\cos x + 2\sin x = 1,$$

où x est un angle compris entre 0 et 400 grades.

2er sujet - Démontrer que si a, b, c, A, B, C sont les mesures des côtés et des angles d'un triangle, on a

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A},\\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos \mathrm{B},\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C},\end{aligned}$$

Réciproque.

3er sujet - x étant la mesure algébrique d'un arc, exprimée en radians, trouver la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0.

En déduire la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x, exprimé en grades, tend vers 0.

II

1. On donne dans un plan (P) une droite CT) et deux points fixes F et F′ tels que FF′ = $2c$. On désigne par O le milieu du segment FF′, par H, H′ et O′ les projections orthogonales des points F, F′ et O sur la droite (T), par d la longueur OO′, par α l'angle de $\overline{\mathrm{OF}}$ avec $\overline{\mathrm{OO'}}$. On oriente les perpendiculaires à la droite (T) de façon que le sens positif soit celui de O vers O′.

   Calculer $\overline{\mathrm{FH}}$ et $\overline{\mathrm{F'H'}}$ en fonction de c, d et α.

   Montrer que l'on $\overline{\mathrm{FH}} + \overline{\mathrm{F'H'}} = 2\overline{\mathrm{OO'}}$.

2. Soit (C) une conique de foyers F et F′, de centre O, d'axe focal $2a$ et de distance focale FF′ = $2c$. Le cercle de diamètre FF′ coupe l'axe non focal en deux points I et I′. Soit (T) une droite du plan de la conique ; on désigne par H, H′, O′, J, J′ les projections orthogonales des points F, F′, O, I et I′ sur (T).

   Évaluer la somme

   $$\overline{\mathrm{FH}}^2 + \overline{\mathrm{F'H'}}^2 + \overline{\mathrm{IJ}}^2 + \overline{\mathrm{I'J'}}^2$$

   en fonction de c et de la longueur OO′ = d.

   Montrer que $\overline{\mathrm{IJ}}^2 + \overline{\mathrm{I'J'}}^2$ reste constant lorsque la droite (T) se déplace dans le plan en enveloppant la conique (C).

   Réciproquement, I et I' étant deux points fixes, montrer que l'enveloppe des droites (T) telles que la somme des carrés des distances des points I et I′ à cette droite reste constante et égale à k^2 est une conique dont on indiquera les foyers, l'axe focal et la distance focale.

   Signaler un cas de dégénérescence de cette conique.

3. Plus généralement, une conique à centre (C), de foyers F et F$'$, de centre O, étant donnée, on peut associer d'une infinité de façons aux deux points F et F$'$ les points I_1 et I'_1 où un cercle quelconque passant par F et F$'$ coupe l'axe non focal.

Pour chaque couple de points I_1 et I'_1 le rapport $\dfrac{\overline{OI_1}}{\overline{OI'_1}}$ a une valeur déterminée, que l'on calculera en fonction de l'angle $\widehat{OI'_1F} = \varphi$.

Évaluer les longueurs OI_1 et OI'_1 en fonction de la demi-distance focale c de la conique (C) et de tg φ.

Soient alors (T) une droite du plan, H, H$'$, O$'$, J_1, J'_1 les projections orthogonales des points F, F$'$, O, I_1 et I'_1 sur (T).

Calculer la somme $\overline{FH}^2 + \overline{F'H'}^2 + 2\overline{I_1J_1}^2 \cos^2\varphi + 2\overline{I'_1J'_1}^2 \sin^2\varphi$ en fonction de c et de la longueur $OO' = d$.

Montrer que $\overline{I_1J_1}^2 \cos^2\varphi + \overline{I'_1J'_1}^2 \sin^2\varphi$ reste constant lorsque (T) se déplace dans le plan en enveloppant la conique (C).

Réciproquement, I_1 et I'_1 étant deux points fixes d'un plan, J_1 et J'_1 leurs projections orthogonales sur une droite (T) de ce plan, λ^2 et μ^2 deux nombres donnés tels que $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, montrer que l'enveloppe des droites (T) telles que

$$\lambda^2\overline{I_1J_1}^2 + \mu^2\overline{I'_1J'_1}^2$$

reste constant et égal à k^2 est une conique dont on déterminera les foyers, l'axe focal et la distance focale.

Signaler un cas de dégénérescence de cette conique.