## Corrigé de l'exercice 1.

### Partie préliminaire

**1.** $5 = 1^2 + 2^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. $22 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$.

**2.** Non voir la question précédente.

**3.** Oui, car $n = 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2$.

### Avec deux carrés seulement

**4.** $58 = 3^2 + 7^2$.

**5.** Les carrés inférieurs à 21 sont : 1, 4, 9 et 16. Avec deux de ces nombres on peut faire $20 = 4^2 + 2^2$ et $25 = 4^2 + 3^2$, les nombres entre 20 et 25 ne sont pas bicarrés.

**6.** Il y a une infinité de nombre bicarrés car il y a une infinité de nombres carrés, qui sont des bicarrés. En ajoutant 1, on obtient un nouveau bicarré non présent dans la liste précédente. Il y a une infinité de nombres bicarrés.

**7.** **a.**

$$\begin{aligned}\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2\\ &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2\\ &= (ac+bd)^2(ad-bc)^2\end{aligned}$$

**b.**

$$\begin{aligned}18\times 58 &= \left(3^2+3^2\right)\left(3^2+7^2\right)\\ &= (3\times 3 + 3\times 7)^2 + (3\times 7 - 3\times 3)^2\\ &= 30^2 + 12^2\end{aligned}$$

**c.** On considère un bicarré $n = a^2 + b^2$.

$$\begin{aligned}2n &= \left(a^2+b^2\right)\left(1^2+1^2\right)\\ &= (a+b)^2 + (a-b)^2\end{aligned}$$

**d.** Soit un nombre entier bicarré pair. Il existe $n$, $a$ et $b$ tels que $2n = a^2 + b^2$. Alors $a$ et $b$ sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Les nombres $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{a-b}{2}$ sont des entiers. On a alors, $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} = n$. Donc, la moitié d'un bicarré pair est encore un bicarré.

**e.** $1\,344 = 2^6 \times 21$. Or 21 n'est pas un bicarré, ni son double et donc 1 344 n'est pas un bicarré.

**f.** Oui, car 2 est un bicarré, donc $2^n$ est un bicarré, pour toutes les valeurs de $n$ entières positives.

**g.** Oui, ils existe une infinité de nombres pairs non bicarrés. Tous ceux de la forme : $2^n \times 21$.

## Avec au plus quatre carrés

**8.** Le programme python donne la liste de toutes les décompositions possibles, il ne retient que les valeurs qui ne sont pas déjà présent.

**Exercice national, les grands pairs...**

```
N = 7044

R = 1
while R*R < N:
    R+=1

for c1 in range(R,-1,-1):
    for c2 in range(0,c1+1) :
        for c3 in range(0,c2+1) :
            for c4 in range(0,c3+1) :
                s = c1*c1 + c2*c2 + c3*c3 + c4*c4
                if s == N :
                    candidat = [c1,c2,c3,c4]
                    candidat.sort()
                    if candidat not in resultat:
                        resultat.append(candidat)

print(resultat)

for elem in resultat:
    if 83 in elem:
        print(elem)

for elem in resultat:
    if 1 in elem :
        r  = elem[1]-1
        if elem[2] == elem[1]+r and elem[3] == elem[2]+r:
            print(elem)
```

De plus il donne les réponses aux questions suivantes.

**9.** **a.** Le plus grand nombre dont le carré est inférieur à 7 044 est 83. Il reste à décomposer 155 en somme de trois carré.

Le plus grand carré compris dans 155 est le carré de 12. Il reste alors 11, ne peut pas être décomposer en somme de deux carrés.

On enlève $11^2$, il reste $34 = 25 + 9$. Donc, une décomposition de $7\,044 = 83^3 + 11^2 + 5^2 + 3^2$.

Le programme trouve une autre décomposition : $5^2 + 7^2 + 9^2 + 83^2$.

**b.** Soit $r$ la raison de cette suite. $r$ vérifie : $1+(r+1)^2+(2r+1)^2+(3r+1)^2 = 7044$. Soit $7r^2 + r - 3520 = 0$. Le discriminant vaut 98 516, et la seule solution entière et positive est 22. Les quatre termes cherchés sont $1^2 + 23^2 + 45^2 + 67^2$.

## Corrigé de l'exercice 2.

**1.** Cas de deux disques.

**a.** Les deux disques ont le même encombrement si $MB + r = AE = R$.
Dans le triangle $AMB$ rectangle en $M$, le théorème de Pythagore donne : $AB^2 = AM^2 + MB^2$, soit $MB^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$. Donc $MB = 2\sqrt{Rr}$.
On a donc $2\sqrt{R}\sqrt{r} + r - R = 0$. En posant $x = \sqrt{r}$, on doit résoudre $x^2 + \sqrt{R}x - R = 0$. Cette équation admet deux solutions :

$$\frac{-2\sqrt{R} - 2\sqrt{2}\sqrt{R}}{2} < 0 \text{ et } \frac{-2\sqrt{R} + 2\sqrt{2}\sqrt{R}}{2} = \sqrt{R}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Finalement $r = R\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

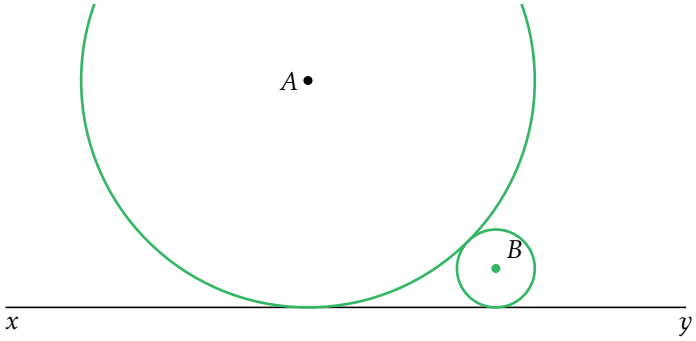


Figure 1: *Avec deux disques, encombrement minimal,* $R = 3$, $r = 3\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$

**b.** Si $r > R\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$, alors l'encombrement est $R + MB + r = R + 2\sqrt{Rr} + r = \left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2$.

**2.** Cas de trois disques.

**a.** On utilise le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles $ABM$, $BCN$ et $APC$. On obtient : $MB = 2\sqrt{pq}$, $NB = 2\sqrt{qr}$ et $PC = 2\sqrt{pr}$.
Comme $MN = MB + BN$, on en déduit que $\sqrt{pr} = \sqrt{pq} + \sqrt{qr}$. Soit, $pr = pq + qr + 2q\sqrt{pr}$. Soit :

$$q = \frac{pr}{\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)^2}.$$

**b.** En ordonnant de la gauche vers la droite les rayons des cercles, on obtient un encombrement de $p + LB + BM + r$, soit $p + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{qr}$.

**c.** On obtient alors $p + q + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$.

**d.** Les trois encombrements sont :

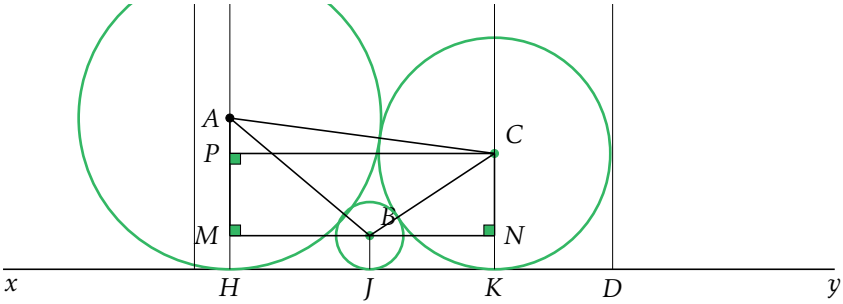


FIGURE 2: *Avec trois disques, avec un cercle tangent à deux autres*

- L'encombrement $E_1$ de $A-B-C$ est : $p+2\sqrt{pq}+2\sqrt{qr}+r$.
- L'encombrement $E_2$ de $A-C-B$ est : $p+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}+q$.
- L'encombrement $E_3$ de $B-A-C$ est : $q+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+r$.

On a :

$$\begin{aligned} E_1-E_2 &= 2\sqrt{p}\left(\sqrt{q}-\sqrt{r}\right)+r-q \\ &= 2\sqrt{p}\left(\sqrt{q}-\sqrt{r}\right)+\left(\sqrt{r}-\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{r}+\sqrt{q}\right) \\ &= \left(\sqrt{q}-\sqrt{r}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{r}+\sqrt{p}-\sqrt{q}\right) \end{aligned}$$

Comme $p \geqslant q \geqslant r$, c'est le produit de nombres positifs, donc $E_1-E_2 \geqslant 0$ et donc $E_1 \geqslant E_2$.

De la même manière $E_1 \geqslant E_3$.

On en déduit que l'encombrement maximal est celui obtenu avec l'ordre décroissant.

**e.** On calcule $E_3-E_2$, ce qui donne :

$$\left(\sqrt{p}-\sqrt{r}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}-\left(\sqrt{q}-\sqrt{r}\right)\right).$$

Si $\sqrt{p}-\sqrt{q} \geqslant \sqrt{q}-\sqrt{r}$ le produit est positif est donc $E_3 \geqslant E_2$ et donc l'ordre $B-A-C$ est minimal.

Réciproquement, si $E_3 \geqslant E_2$, alors, il faut que $\sqrt{p}-\sqrt{q} \geqslant \sqrt{q}-\sqrt{r}$.

**3.** Sept d'un coup.

**a.** On obtient le tableau 1.

**b.** Le programme suivant calcul les valeurs de l'encombrement.

| Rayon | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{r(r+1)}$ | | 9,487 | 8,485 | 7,483 | 6,481 | 5,477 | 4,472 |
| Encombrement | 20 | 37,974 | 53,944 | 67,911 | 79,872 | 89,827 | 97,771 |

Table 1

**Exercice national, les grands pairs...**

```
r = [10,9,8,7,6,5,4]
s = 20
e = [20]
for rayon in r :
    s = s + 2*sqrt(rayon*(rayon-1)) -1
    e.append(s)
l1 = "|"
l2 = "|"
for i in range(0,7):
    l1 += "{:^6}|".format(r[i])
    l2 += "{:2.3f}|".format(e[i])

print(l1)
print(l2)
```

**c.** Pour chaque triplet de disques, ils sont dans la position qui occupe le maximum de place. Donc la suite de 7 disques occupe le plus de place. La somme des diamètres est de 98 cm, la différence est donc minime.

**d.** On regarde la place avant et après les échanges.

- Place prise par le disque de rayon 4 et le disque de rayon 10 :

$$4+2\sqrt{10\times 4}+10;$$

- place prise par le disque de rayon 10 : 20.
- Place prise par les disques de rayon 5 et 4 :

$$5+2\sqrt{5\times 4}+4;$$

- Place prise par le disque de rayon 5 : 10.

Au total

$$5+4\sqrt{5}-10-(4+4\sqrt{10}-10)=1+4\sqrt{5}\left(1-\sqrt{2}\right)\approx 1{,}3\,\text{cm}.$$

**4. a.** Il y a 7 possibilités pour le premier cercle, 6 pour le deuxième, etc. Soit $7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 5040$. Si on considère que deux dispositions symétriques en échangeant la droite et la gauche, on divise se nombre par 2.

**b.** On commence par regarder de droite à gauche. Le 10 est nécessairement au centre. Le 4 ne peut être que dans deux positions : à droite, ou juste après le 10.

| Petit | Grand | Petit | 10 | Petit | Grand | Petit |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 8 | | 6 | 7 | 5 |
| 4 | 9 | 8 | | 5 | 7 | 6 |
| 4 | 9 | 7 | | 6 | 8 | 5 |
| 4 | 9 | 7 | | 5 | 8 | 6 |
| 4 | 9 | 6 | | 5 | 8 | 7 |
| 4 | 9 | 6 | | 7 | 8 | 5 |
| 4 | 9 | 5 | | 6 | 8 | 7 |
| 4 | 9 | 5 | | 7 | 8 | 6 |
| 4 | 8 | 7 | | 5 | 9 | 6 |
| 4 | 8 | 7 | 10 | 6 | 5 | 9 |
| 4 | 8 | 6 | | 5 | 9 | 7 |
| 4 | 8 | 6 | | 7 | 9 | 5 |
| 4 | 8 | 5 | | 6 | 9 | 7 |
| 4 | 8 | 5 | | 7 | 9 | 6 |
| 4 | 7 | 6 | | 8 | 9 | 5 |
| 4 | 7 | 6 | | 5 | 9 | 8 |
| 4 | 7 | 5 | | 8 | 9 | 6 |
| 4 | 7 | 5 | | 6 | 9 | 8 |
| 4 | 6 | 5 | | 8 | 9 | 7 |
| 4 | 6 | 5 | | 7 | 9 | 8 |

Table 2: *Différentes possibilités*

On obtient alors le tableau 2. On a alors 20 possibilités. En mettant, 4 à droite de 10, on en rajoute 20.

En tenant compte des symmétries, il y a 80 possibilités.

**c.** Cela dépend de la place du plus grand disque.

- En première position ; il n'y a que 1 possbilité.
- En 2e position : il y a 6 posssibilités : une fois choisi le disque en première position.
- Le disque en 3e position, 15 possibilités.
- Le disque en 4e position, 20 possibilités.

Au total, il y a 32 positions et par symétrie, cela fait 64 possibilités.

## Corrigé de l'exercice 3.

### Calcule du rayon de la Terre

**1.** Le triangle $ABO$ est rectangle en $A$, on a donc d'après Pythagore :

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2 \text{ soit } 2Rh + h^2 = d^2.$$

**2.** $h$ est en mètres, $R$ en milliers de km, donc le rapport $\dfrac{h}{R}$ est proche de 0.

**3.** On peut donc négliger $h^2$ devant $d^2$. Donc $2Rh \approx d^2$, soit $R \approx \dfrac{d^2}{2h}$.

**4.** $R \approx \dfrac{16^2}{40 \times 10^{-3}} = \dfrac{256 \times 10^3}{40} = 6\,400\,\text{km}$.

**5.** Si le bateau ne se déplace pas vers le sud, alors, les points $A$, $B$, $O$ et $C$ ne sont plus coplanaires, le raisonnement précédent n'est plus valable.

### Ligne d'horizon

**6.** Toujours dans le triangle rectangle $ABO$, on a $(R+h)^2 = R^2 + d^2$

**7.** On a donc : $h + R = \sqrt{d^2 + R^2}$, donc $h = \sqrt{d^2 + R^2} - R$, ce qui donne $h = \sqrt{50^2 + 6\,400^2} - 6\,400 \approx 19{,}5\,\text{m}$.

On a $\tan\left(\widehat{AOC}\right) = \dfrac{d}{R} = \dfrac{1}{128}$.

La longueur de l'arc $AC$ est donc $2\pi R \arctan\left(\dfrac{1}{128}\right) \approx 49{,}998\,98\,\text{km}$.

### Calcul de la distance $d$

**8.** On utilise la loi des sinus dans le triangle $IBJ$ :

$$\frac{IB}{\sin(\beta)} = \frac{JB}{\sin(\alpha)} = \frac{IJ}{\sin(180 - \alpha - \beta)}.$$

Comme $\sin(180-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$ et $d=BI\sin(\alpha)$, on obtient donc :

$$\frac{IB\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}=\frac{IJ\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

soit

$$d=\frac{IJ\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

**9.** On trouve $d=15{,}998\,9\,\text{km}=15\,\text{km}$.