CATEGORIES & STRUCTURES
La réconciliation de Russell & de Poincaré dans le structuralisme de Lautman

Invité à l'initiative de mon collègue Franck Lelièvre pour animer en tant que philosophe deux ateliers dans ce Congrès, j'avais d'abord prévu de présenter le lignage de Cantor et Russell. La nouvelle du colloque sur la Théorie des Catégories (ThC) qui vient d'avoir lieu rue d'Ulm, cependant, m'a conduit à élargir mon propos pour y inclure le rôle des catégories. La philosophie mathématique[1] s'est circonscrite en un débat classique entre le *formalisme* de Hilbert, l'*intuitionisme* de Brouwer et le *logicisme* de Frege et Russell, derrière lesquels se profilent autant de philosophies tutélaires : le logicisme s'accorde à un *réalisme* platonicien, l'intuitionisme à un *conceptualisme* aristotélicien et le formalisme à un *nominalisme*. Selon Badiou le débat s'est maintenant resséré en une compétition pour le titre de *Fondement des Mathématiques* entre deux prétendants : la *Théorie des Ensembles* marquée par son platonisme et la *Théorie des Catégories* qui attesterait une pérennité de l'aristotélisme. Cette position a au moins le mérite d'offrir une thèse à discuter. Quelle est la leçon philosophique à tirer de la confrontation évoquée par Badiou ?

1. *Le Théorème de Frege*. De quoi parle-ton aujourdhui en philosophie mathématique ? Selon un de ses meilleurs spécialistes, Mathieu Marion[2], on y cause d'abord du *Théorème de Frege*. Ce théorème est une ironie de l'histoire. Frege est en effet avec Russell un des champions du logicisme, d'après lequel les mathématiques sont de la logique. Et il est notoire que selon Russell en personne, d'après les analyses qu'il a effectuées à partir de 1903, le logicisme échoue sur trois écueils dont le plus grave est le recours à un *axiome de l'infini* qu'il faut ajouter aux vérités logiques pour obtenir les mathématiques. Or les commentateurs de Frege, en revisitant ses *Fondements de l'Arithmétique* (1884)[3], se sont aperçus qu'ils contiennent une démonstration de l'infinité des nombres (autrement dit une démonstration du second axiome de Peano)[4]. Par conséquent, tandis que Russell, en 1919, demande encore[5] qu'on lui accorde un *axiome* de l'infini, Frege avait fait de l'existence d'un ensemble infini, dès 1884, l'objet d'un *théorème*. Le principe de sa démonstration a la simplicité qui sied à un tel sujet. Considérons par exemple l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Cette classe des entiers jusqu'à 4 a *cinq* éléments. Or le nombre naturel est défini par Frege comme classe de classes équipotentes (que Russell appelera *similaires*). Donc l'existence des quatre premiers nombres rassemblés en une classe implique l'existence du cinquième, etc. C'est donc d'abord à une véritable réhabilitation du logicisme que nous asistons. Mais évidemment, toute la démonstration est suspendue au fait que la suite des entiers commence à 0, défini comme cardinal de $\varnothing$. Ce

---

[1] Pour une introduction, cf. J. Cl. Dumoncel, *Philosophie des Mathématiques*, Ellipses, 2002, et « La philosophie des mathématiques au temps du postmoderne », *History and Philosophy of Logic*, **23** (2002), 121-132.

[2] M. Marion, « Philosophie des Mathématiques » in Pascal Engel (dir.), *Précis de Philosophie Analytique*, PUF, 2000.

[3] Trad. Le Seuil.

[4] Cette démonstration a été formalisée par George Boolos. Cf. Richard G. Heck Jr, « Introduction au théorème de Frege » in M. Marion & A. Voizard (dir.), *Frege*, L'Harmattan, 1998.

[5] Cf. son *Introduction à la philosophie mathématique*, trad. F. Rivenc (Payot), ch. VIII, 2e § et ch. XIII.

présupposé va prendre toute sa signification dans le cadre de ce qu'il faut appeler le « brelan de Badiou »

2. *Le brelan de Badiou*. A la fin du XIXe siècle, les mathématiques sont saisies d'une véritable fièvre d'axiomatisation. L'Arithmétique, en particulier, va faire l'objet de *trois* axiomatisations qui se succèdent en rafale entre 1884 et 1889, donnant autant de chefs-d'œuvres : les *Fondements de l'Arithmétique* par Frege (1884), *Les Nombres : Que sont-ils & à quoi servent-ils ?* par Dedekind (1888), *Les Principes de l'Arithmétique présentés selon une nouvelle méthode*, par Peano (1889). Qu'est ce qui fait la différence entre ces trois traitements du même objet **N** ? Dans *Le Nombre & les nombres* (1990)[6], Badiou l'a vu (§§ 2, 5 & 4) : **N** qui est chez Frege la *descendance de 0* est chez Peano la *descendance de 1* et chez Dedekind l'*ascendance de l'∞*. C'est ce que nous appelons le brelan de Badiou. Il signifie que c'est le triplet $\langle 0, 1, \infty\rangle$ qui commande objectivement les options subjectives adoptées par les trois mathématiciens. Et le philosophe est ici comme l'oiseau de Minerve qui s'envole au crépuscule, découvrant après coup les rôles respectifs joués par les protagonistes qui sont entrés successivement sur la scène de l'Histoire. Mais s'il est beau de découvrir les rôles derrière les personnages, il est plus beau encore de dévoiler le drame qui réunit ces rôles. D'où sort le brelan de **N** que Badiou a en main ?

3. *L'Archibrelan de Whitehead & Russell*. A la question posée par le brelan de Badiou, la réponse est donnée depuis 1910 dans le tome 1^{er} des *Principia Mathematica* (= PM) de Whitehead & Russell. Dans un passage qui n'a jamais fait l'objet d'aucun commentaire, comme s'il était protégé par une tache aveugle, nous y lisons (p. 219) :

> ***24.23.** $\alpha \cap \Lambda = \Lambda$
> ***24.24.** $\alpha \cup \Lambda = \alpha$
> Les deux propositions qui précèdent exposent l'analogie algébrique entre Λ et 0.
> ***24.26.** $\alpha \cap V = \alpha$
> Ceci expose l'analogie entre V et 1.
> ***24.27.** $\alpha \cup V = V$
> Ceci expose l'analogie entre V et ∞

Les quatre **Analogies Algébriques** évoquées ici par Whitehead & Russell peuvent s'énoncer comme suit (en notant « et de même » par « & // ») :

***24.27.** L'Etre $\cup\, x =$ l'Etre	& //	$\infty + n = \infty$
***24.26.** L'Etre $\cap\, x = x$	& //	$1 \times n = n$
***24.24.** $x \cup$ le Néant $= x$	& //	$n + 0 = n$
***24.23.** $x \cap$ le Néant = le Néant	& //	$n \times 0 = 0$

Dans la colonne de gauche les quatre **Equations ontologiques** signifient que **l'Etre** qui est *absorbant* dans l'*union* est *neutre* dans l'*intersection* et qu'inversement le **Néant** qui est *neutre* dans l'*union* est *absorbant* dans l'*intersection*. Autrement dit l'Etre & le Néant *échangent les rôles* du Neutre & de l'Absorbant respectivement aux opérations d'Union & d'Intersection, à partir d'une absorption de tout x par union à l'Etre. De sorte que le Théorème Premier, ici, est cette ***union absorbante avec l'Etre***.

[6] Le Seuil.

A la colonne de droite il faut adjoindre la Double relation énoncée par Cantor dans ses *Fondements d'une théorie générale des Ensembles* de 1883 (§ 5 *in fine*)[7] : $1 + \propto = \propto < \propto + 1$. Elle signifie la non-commutativité de l'addition quand l'infini est l'ordinal transfini. Cette non-commutativité de l'addition des ordinaux transfinis est évidemment un correctif à l'équation $\infty + n = \infty$ (qui vaut encore avec les cardinaux dans $\aleph + n = \aleph$) et à l'analogie ***24.27** qui en découle.

Les quatre analogies algébriques de Whitehead & Russell contiennent l'explication du brelan de Badiou : le triplet $\langle 0, 1, \infty \rangle$ est sélectionné du fait que *0 assume le rôle algébrique du Néant, tandis que 1 & ∞ se partagent le rôle algébrique de l'Etre*. Cette fondation offerte par les PM conduit à en reconsidérer le contenu central.

4. *Le structuralisme occulté de Russell*. Dans l'*Introduction à la philosophie mathématique* de Russell, en 1919, nous trouvons la figure suivante, que nous avons appelée[8] le *Rectangle Relationnel de Russell* :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & y \arrow[d, "S"] \\ z \arrow[r, "Q"'] & w \end{tikzcd}$$

Il s'explique à partir d'un exemple-type (p. 120) :

> Une carte illustre de la manière la plus simple ce que nous voulons. Si un lieu est au nord d'un autre, sur la carte l'endroit correspondant au premier est au-dessus de l'endroit qui représente l'autre ; pour un lieu à l'ouest d'un autre, il sera à gauche du second, et ainsi de suite. La structure de la carte correspond ainsi à celle de la région représentée.

D'où ce que Russell ajoute à l'Algèbre des relations (où p. ex. un guide est donné par $n^0 = 1$). De même que la similarité entre classes provient de l'existence d'une bijection entre ces classes, la similarité entre deux relations *P* et *Q* provient de l'existence d'une troisième relation *S* qui établit une *corrélation de relations* et qui pour cette raison est appelée le Corrélateur de ces relations. P. ex. les relations « à l'ouest » et « à gauche » ont pour corrélateur la relation « est représenté sur la carte par ».

La similarité est une relation d'équivalence et on peut donc en extraire une *identité*. Ainsi chacune des deux similarités va-t-elle produire une identité correspondante. Et de même que deux ensembles similaires ont le même *nombre* d'éléments, deux relations similaires ont la même *Structure*. Russell a ainsi défini (dès 1903) un concept de structure entièrement distinct des structures-mères que Bourbaki mettrait bien plus tard en vedette. Comme la structure au sens de Russell est définie de manière homogène au nombre, nous l'appelerons *structure-sœur* du nombre.

---

[7] Dans notre écriture de cette formule nous substituons à « ∞ » le signe « ∝ » afin d'indiquer qu'il s'agit de l'ordinal ω de Cantor tout en rappelant qu'il s'agit toujours d'un cas de l'infini considéré dans ses variétés.

[8] J. Cl. Dumoncel, « Le Transfini, les Structures & la Logique. La philosophie mathématique de Russell revisitée », *Cahiers de l'unebévue*, hiver 2003-2004.

5. *La Table des Catégories Mathématiques*. La ThC élaborée par Eilenberg & McLane à partir de 1945 culmine dans une Table des Catégories, que nous appelerons la Table des Catégories Mathématiques (TCM). Ramenée à ses plus grandes lignes, cette Table est la suivante :

CATEGORIE	**Objets**	***Morphismes***
Ensemble (**E**ns)	Ensembles	Applications
Groupe (**G**r)	Groupes	Homomorphismes de groupe
	Espaces vectoriels	Applications linéaires
(**T**op)	Espaces topologiques	Applications continues

En tout premier lieu, la TCM permet ainsi de voir d'un coup d'œil le rapport entre le structuralisme bourbakiste et le nouveau point de vue rendu possible par la ThC. La première leçon la plus patente que l'on peut lire immédiatement sur la Table des Catégories Mathématiques, en effet, c'est que *la théorie des Catégories d'Eilenberg & McLane est l'Arche de Noé des Structures-mères bourbakistes*. Mais plus précisément, de même qu'avant le déluge Noé fait entrer dans l'arche « deux de chaque espèce » vivante, « un mâle et une femelle » (Gn 6. 19), dans la Théorie des Catégories ont trouvé abri successivement les différentes *Structures-mères* de Bourbaki accompagées chacune de son *Morphisme-père*.

6. *De la Catégorie au Foncteur*. C et C' étant deux catégories, un foncteur F de C dans C' associe à tout objet A de C un objet F(A) de C' et à tout morphisme f de C un morphisme F(f) de C'de telle sorte que pour tout A de C, $F(1_A) = 1_{F(A)}$ et que si g & f sont composables dans C, F(gf) = F(g) F(f). Un foncteur trouve donc sa représentation naturelle sur un rectangle de Russell pour des relations fonctionnelles puisque la TCM est une sorte de table de Pythagore où les morphismes sont fonction (t) des catégories dont ils sont le complément naturel :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t^{-1}"] \arrow[d, "F"'] & f \arrow[d, "F"] \\ F(A) \arrow[r, "t^{-1}"'] & F(f) \end{tikzcd}$$

7. *Poincaré dans le pedigree de Papert pour les foncteurs*. Seymour Papert a proposé[9] une véritable archéologie de la ThC. Elle tient en trois points principaux :

1° « La filiation la plus directe de la notion de catégorie remonte à l'emploi par Poincaré des invariants numériques des espaces topologiques » (p. 506)

2° « La liaison avec la notion de catégorie provient d'une généralisation déjà implicite dans la construction de Poincaré. Au lieu d'associer à l'espace topologique [X] un ensemble de nombres on y associe des groupes [G] » selon une fonction [H] (p. 507)

3° « Soit *C* une catégorie d'espaces topologiques pour lesquels cette construction est possible. *H* devient alors une sorte d'homomorphisme[10] de catégorie – le mot normalement employé est foncteur – qui transforme la catégorie *C* en sous-catégorie C_G des groupes » (p. 508)

---

9 « Structures & Catégories » in Piaget (dir.), *Logique & Connaissance scientifique*, Encyclopédie de la Pléiade, 1967.

10 Syn. de morphisme (Chambadal, *Dictionnaire de Mathématiques*, Hachette).

Ce qui donne dans le Rectangle de Russell :

Espace topologique — Application continue

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "\textit{Foncteur}"'] & \bullet \arrow[d, "\textit{Foncteur}"] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Groupe — Homomorphisme de groupe

On voit que l'historique de Papert concerne plus largement les Catégories prises dans leur association aux Foncteurs. Et en tant que tel il est non seulement confirmé mais approfondi par Poincaré lui-même quand celui-ci déclare : « j'entrevoyais dans l'Analysis Situs un moyen d'aborder un problème important de la théorie des groupes, la recherche des groupes discrets ou des groupes finis contenus dans un groupe continu donné »[11].

Quant à la signification philosophique du procédé, nous la trouverons dégagée par Albert Lautman : « Lorsque Poincaré envisage un groupe discontinu de transformations et la fonction continue automorphe[12] attachée à ce groupe, il rapproche deux genres d'être totalement étrangers de nature, mais l'existence de la fonction continue n'en exprime pas moins les propriétés du domaine de discontinuité qui sert à la définir »[13]. Nous nous apercevons donc ici que non seulement Poincaré est l'ancêtre mais que la signification philosophique de cette paternité pour la théorie de catégories se trouve exposée d'avance chez Lautman dès 1937.

Conclusion. La théorie des Catégories se révèle ainsi jouer pour la philosophie mathématique un rôle unique de révélateur et d'échangeur. Tandis que la table des catégorie mathématiques recueille les structures mères de Bourbaki, qui en reçoivent un rôle renouvelé, la Structure au sens de Russell vient fournir le cadre naturel où les catégories elles-mêmes sont transformées par des foncteurs. Et cette intégration trouve une illustration paradigmatique dans un procédé de Poincaré dont la signification a été dégagée par Albert Lautman. La théorie de Catégories opère ainsi la réconciliation de Poincaré avec Russell dans un univers de pensée dont Lautman a posé les principes.

Mon ignorance de ce que je pouvais attendre sur ce sujet du côté de l'auditoire ne m'a pas permis la pratique interactive qui est sans doute souhaitable dans un atelier. Cependant cet auditoire a témoigné d'un intérêt soutenu au propos, et la discussion qui a suivi chacun des deux ateliers a permis plusieurs mises au point très utiles, tout en attestant la compétence des mathématiciens dans la philosophie de leur discipline. La rencontre a donc été pour l'animateur une expérience très heureuse et fructueuse dont je remercie encore les organisateurs.

---

[11] Cité dans Bottazzini, *Poincaré*, Belin, p. 62.

[12] Notion proche de la notion de fonction fuchsienne découverte par Poincaré pendant qu'il enseignait à Caen.

[13] *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*, 1937, 10/18, p. 198. Une nouvelle édition augmentée des Œuvres d'Albert Lautman, due à son fils Jacques Lautman, est sous presse chez Vrin.