☙ CONCOURS AVENIR - 29 avril 2023 ❧
Sujet A Profil Violet et Vert [1]

DURÉE : 1 h 30 min

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.
Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

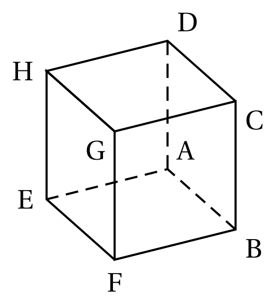
Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).
Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points**, tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point**.

1. Candidats ayant suivi la spécialité mathématiques et une spécialité scientifique ou ayant suivi la spécialité mathématiques et une spécialité non scientifique

GÉOMÉTRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE

Règle de nommage et représentation d'un cube : Dans ce sujet, un cube ABCDEFGH, dénote le cube suivant (aux rotations près du cube) :



Attention! Pour les questions 1 à 5, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

Question 1
On considère le plan (P) d'équation : $x+2y+3z-1=0$.
Quel vecteur est normal à (P) ?

a. $\overrightarrow{n_1}\,(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ **b.** $\overrightarrow{n_2}\,(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ **c.** $\overrightarrow{n_3}\,(1\ ;\ 3\ ;\ -1)$ **d.** $\overrightarrow{n_4}\,(2\ ;\ 3\ ;\ -1)$

Question 2
On considère la droite (d) d'équation : $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$.
Déterminer un vecteur directeur de la droite (d).

a. $\overrightarrow{u_1}\,(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\,(1\ ;\ 2\ ;\ -3)$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\,(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\,(2\ ;\ 1\ ;\ -3)$

Question 3
On considère les points A(1 ; 3 ; 0) et B(5 ; 1 ; −2).
Déterminer l'équation du plan médiateur du segment [AB].

a. $2x-y-z-5=0$ **b.** $2x-y-z+5=0$ **c.** $x+y++2z-3=0$ **d.** $3x+2y-z-14=0$

Question 4
On considère les trois points suivants :

A(−1 ; −2 ; 3) B(−6 ; 1 ; 1) C(−5 ; −3 ; 2)

Le triangle ABC est :

a. équilatéral **b.** rectangle en A **c.** rectangle en C **d.** isocèle en C

Question 5
On considère les trois points suivants :

A(1 ; 2 ; 3) ; B(3 ; 3 ; 5) ; C(−1 ; 2 ; −4)

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB) :

a. $(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ **b.** $\left(2\ ;\ \dfrac{5}{2}\ ;\ 4\right)$ **c.** $\left(0\ ;\ \dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ **d.** $(-3\ ;\ 0\ ;\ -1)$

Attention! Dans les trois prochaines questions, on considère un cube ABCDEFGH, et les points : M le milieu de [CD], P le milieu de [GH] et N le centre de la face ABCD.

Question 6
Quels sont les points coplanaires ?

a. M, C, P et F **b.** A, B, C et P **c.** M, N, E et H **d.** M, P, E et F

Question 7
Le plan et la droite sécants sont :

a. (ABE) et (CP) **b.** (ABC) et (DH) **c.** (MNH) et (BC) **d.** (DAP) et (MG)

Question 8
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG}$ dirigent le plan :

a. (BCD) **b.** (ABF) **c.** (ABG) **d.** (FGB)

Question 9
Soit ABCDEFGH et BIJCFLKG deux cubes de même taille disposés côte à côte.
Soit le point X défini par $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FG}$.
Le point X se situe en :

a. H **b.** G **c.** K **d.** J

Question 10
Soit ABCDEFGH un cube de côté non nul.
Soit les points I et J tels que $\overrightarrow{EI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.
Quel vecteur est dans le plan dirigé par $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{IJ}$?

a. $\overrightarrow{EA}$ **b.** $\overrightarrow{FE}$ **c.** $\overrightarrow{FG}$ **d.** $\overrightarrow{FJ}$

Question 11
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que AD = AE = xAB.
Pour quelle valeur de x, les droites (BH) et (AG) sont-elles orthogonales ?

a. 1 **b.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\sqrt{2}$ **d.** $\dfrac{1}{2}$

CALCUL NUMÉRIQUE, SUITES NUMÉRIQUES

Question 12

Soit (U_n) une suite géométrique telle que $U_1 = 3$ et $U_2 = 9$.
Déterminer la raison de (U_n).

a. -6 **b.** 3 **c.** 12 **d.** 6

Question 13

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

a. 1 **b.** 0 **c.** $-\infty$ **d.** 0

Question 14

Soit a un réel strictement positif.
Que vaut $\ln\left(\sqrt{a}\right)$?

a. $\dfrac{1}{2}\ln(a)$ **b.** $2 + \ln(a)$ **c.** $\dfrac{1}{2} + \ln(a)$ **d.** $2\ln(a)$

Question 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$.
La fonction f est :

a. croissante sur $\mathbb{R}$ **b.** décroissante sur $\mathbb{R}$ **c.** positive sur $\mathbb{R}$ **d.** négative sur $\mathbb{R}$

Question 16

Calculer la somme à progression géométrique suivante :

$$128 + 32 + 8 + \cdots + \frac{1}{8}$$

a. $+\infty$ **b.** $\dfrac{512}{3}$ **c.** $\dfrac{1\,365}{8}$ **d.** $\dfrac{3\,075}{8}$

Question 17

Soit (u_n) une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_2 = 12$ et $u_5 = 96$.
Déterminer la formule explicite de u_n.

a. $u_{n+1} = 2u_n$ **b.** $u_n = 2 \times 3^n$ **c.** $u_n = 2n$ **d.** $u_n = 3 \times 2^n$

Question 18

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3$.
Cette suite est :

a. ni minorée, ni majorée **b.** minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 5

c. non minorée et majorée par 5 **d.** minorée par $\frac{1}{2}$ et non majorée

Question 19

Quelles sont les solutions de l'inéquation $3^x < 2$?

a. $\left]-\infty\,;\,\frac{\ln 2}{\ln 3}\right[$ **b.** $\left]\frac{\ln 2}{\ln 3}\,;\,+\infty\right[$ **c.** $\left]-\infty\,;\,\frac{\ln 3}{\ln 2}\right[$ $\left]\frac{\ln 3}{\ln 2}\,;\,+\infty\right[$

Question 20

Résoudre $\frac{\ln(5x)}{\ln(3)} = 2$.

a. $x = \frac{8}{5}$ **b.** $x = 9$ **c.** $x = \frac{9}{5}$ $x = 8$

FONCTIONS

Question 21

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-m\}$ par $f(x) = \frac{x+3}{x+m}$.
Pour quelles valeurs de m cette fonction est-elle strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-6[$?

a. $]3\,;\,+\infty[$ **b.** $]3\,;\,6]$ **c.** $]3\,;\,6[$ **d.** $[3\,;\,6]$

Question 22

Soit f une fonction de variable réelle dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation : $2f(x) - 3 = 0$.

a. 2 **b.** 1 **c.** 4 **d.** 3

Question 23

Soit f une fonction de variable réelle telle que pour tout x réel, $f'(x) = x(x+2)^2$.
Déterminer le nombre d'extremums de f.

a. 0 **b.** 3 **c.** 2 **d.** 1

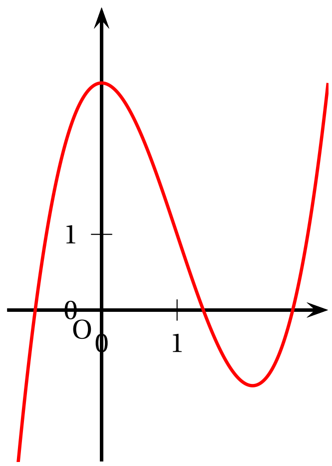
Question 24

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-3x}$.

a. $(2x-3)\mathrm{e}^{x^2-3x}$ **b.** e^{x^2-3x} **c.** $\left(x^2-3x\right)\mathrm{e}^{x^2-3x-1}$ **d.** $\left(x^2-3x\right)\mathrm{e}^{2x-3}$

Attention! Pour les deux prochaines questions, on considère la courbe suivante :

Question 25



a. $y = x^3-3x^2+3$ **b.** $y = -x^3+3x^2+3$ **c.** $y = x^4-2x^2+3$ **d.** $y = -x^4+2x^2+3$

Question 26

Sur quel intervalle est-elle convexe?

a. $]1\ ;\ +\infty[$ **b.** $]0\ ;\ +\infty[$ **c.** $]-\infty\ ;\ 1[$ **d.** $]-\infty\ ;\ 0[$

Question 27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\ ;\ -1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^3+2x^2-x-2}$.

Combien d'asymptotes possède la courbe représentative de f ?

a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

Question 28

Parmi les fonctions suivantes, laquelle est convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$?

a. $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x-1\right)$ **b.** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ **c.** $f(x) = \ln(x)$ **d.** $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$

Question 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.

La fonction f est :

a. décroissante sur $\mathbb{R}$ **b.** décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ **c.** décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ **d.** croissante sur $\mathbb{R}$

Question 30

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de signes de la dérivée est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(3-2x)$.
Sur quel intervalle la fonction g est-elle strictement décroissante ?

a. $]4\,;\,+\infty[$ **b.** $]2\,;\,4[$ **c.** $]1\,;\,2[$ **d.** $]-2\,;\,1[$

Question 31

On considère la fonction f définie sur : par $f(x) = 2x^2\ln(x) - x^2 + 3x - 2$.
Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse :

a. $x = \mathrm{e}$ **b.** $x = \mathrm{e}^{-1}$ **c.** $x = -\mathrm{e}$ **d.** $x = 1$

Question 32

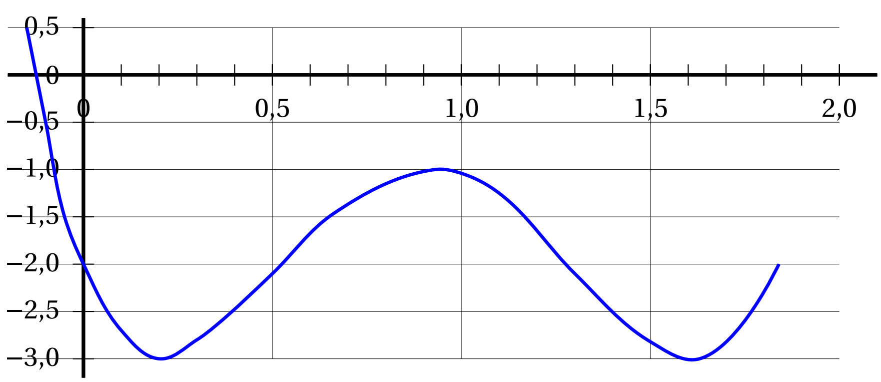
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$: par $f(x) = -x\ln(x) + 2x + 1$.
La courbe représentative de f :

a. est entièrement située sous ses tangentes **b.** est entièrement située au dessus de ses tangentes

c. traverse sa tangente au point $x = \mathrm{e}$ **d.** traverse sa tangente au point $x = 1$

Question 33

On considère la figure suivante représentant la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0$.



a. 6 **b.** 12 **c.** 8 **d.** 9

Question 34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sqrt{\mathrm{e}^x + x^2 + 3} - \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^x\right)$.
L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est :

a. $y = 6 - \frac{1}{4}x$ **b.** $y = 24 - 4x$ **c.** $y = 4 - \frac{x}{6}$ **d.** $y = 24 - 6x$

PRIMITIVES

Question 35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x+5}{x^2+2x+5}$.
Déterminer une primitive de f.

a. $F(x) = -\frac{2}{5}\ln\left(x^2+2x+5\right)$ **b.** $F(x) = -\frac{5}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)$

c. $F(x) = \frac{2}{5}\ln\left(x^2+2x+5\right)$ **d.** $F(x) = \frac{5}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)$

Question 36

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash -1$ par $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$.
Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

a. $F(x) = 2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$ **b.** $F(x) = 2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$

c. $F(x) = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$ **d.** $F(x) = 2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$

Question 37

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ et g la fonction définie par $g(x) = (x+1)f'(x)$.
Déterminer les primitives de g.

a. $G(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+2x-4}} + C$ **b.** $G(x) = \frac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$

c. $G(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$ **d.** $G(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$

PROBABILITÉS

Question 38

Une ville est constituée à 65 % d'hommes dont 30 % pratiquent un sport. Parmi les femmes (de cette même ville), 60 % pratiquent un sport.
On prend une personne au hasard dans la ville. Quelle est la probabilité qu'elle fasse du sport ?

a. $0,305$ **b.** $0,405$ **c.** $0,205$ **d.** $0,505$

Question 39

Un jeu consiste à lancer trois dés A, B, C à 6 faces. L'objectif est d'obtenir au moins deux faces « 6 ». Cependant les dés sont truqués.
Il a été établi que :

— La probabilité d'obtenir un « 6 » avec le dé A est de 0,7

— La probabilité d'obtenir un « 6 » avec le dé B est de 0,6

— La probabilité de gagner à ce jeu est de 0,558

Quelle est la probabilité d'obtenir un « 6 » avec le dé C?

a. $0,3$ **b.** $0,4$ **c.** $0,5$ **d.** $0,6$

Question 40

Une urne contient trois boules blanches et six boules noires. On tire successivement trois boules avec remise.
Quelle est la probabilité d'obtenir plus de boules blanches que de noires?

a. $0,2$ **b.** $\dfrac{7}{27}$ **c.** $0,5$ **d.** $\dfrac{17}{27}$

Question 41
Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(15~;~0,4)$.
Déterminer $P(X = 8)$.

a. $\binom{15}{8} \times 0,4^8 \times 0,6^7$ **b.** $0,4^8 \times 0,6^7$ **c.** $\binom{15}{8} \times 0,4^7 \times 0,6^8$ **d.** $0,4^7 \times 0,6^8$

Attention! Pour les deux questions suivantes, on se place dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O.
Un robot part de O et se déplace aléatoirement verticalement ou horizontalement, de telle manière qu'à chaque pas, soit son abscisse soit sont ordonnée augmente. À chaque déplacement, la probabilité qu'il se déplace selon l'axe des abscisses est de 0,4.

Question 42
Quelle est la probabilité que le robot arrive au point M(7 ; 9) au bout de 16 étapes?

a. $\binom{9}{7} \times 0,4^9 \times 0,6^7$ **b.** $\binom{9}{7} \times 0,4^7 \times 0,6^{16}$ **c.** $\binom{16}{9} \times 0,4^9 \times 0,6^7$ **d.** $\binom{16}{7} \times 0,4^7 \times 0,6^9$

Question 43
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de déplacements du robot selon l'axe des abscisses, après 16 étapes.
Déterminer l'espérance $E(X)$:

a. 8 **b.** $6,4$ **c.** 6 **d.** $8,4$

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Question 44
Déterminer l'affichage de l'algorithme suivant, sachant que l'on saisi la valeur $n = 10$:

Algorithme 1 : Avenir 2023

Entrée
  n : entier naturel
Variables
  u : réel
  i : entier naturel
Traitement
  Saisir n
  Pour i allant de 1 à n faire
    u prend la valeur 1
    u prend la valeur $\dfrac{3}{6-2u}$
  Afficher u

a. 1 **b.** $\dfrac{33}{52}$ **c.** $\dfrac{52}{33}$ **d.** $\dfrac{3}{4}$

Question 45

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Avenir 2023 bis

Variables
  u : réel
  i : entier naturel
Initialisation
  i prend la valeur 0
  u prend la valeur 0
Traitement
  Tant que $i \leqslant 10$ faire
    i prend la valeur $i+1$
    u prend la valeur $2u+3$
  Afficher u

Que retourne cet algorithme ?

a. Le 10^{e} terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0\,,\, u_{n+1} = 2u_n + 3$

b. Le 11^{e} terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0\,,\, u_{n+1} = 2u_n + 3$

c. Le 10^{e} terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0\,,\, u_{n+1} = 3u_n + 2$

d. Le 11^{e} terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0\,,\, u_{n+1} = 3u_n + 2$