Que sont et à quoi servent les Mathématiques (2ème partie)

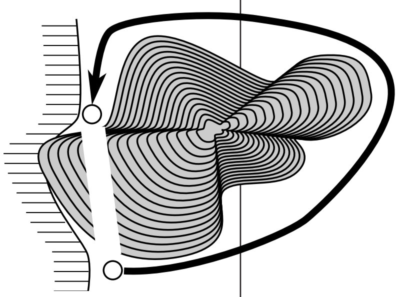
André Deledicq

Voici la suite de l'article d'André Deledicq paru dans PLOT n° 1. Après "le plaisir de faire des mathématiques" et "le double jeu des mathématiques", découvrons que "les mathématiques sont utiles", qu'on peut y comprendre quelque chose à condition de surmonter certains obstacles et "pourquoi les enseigner" ...

Les mathématiques sont utiles

Le tunnel de Samos

C'est ainsi que vers 530 avant Jésus-Christ, dans l'île grecque de Samos, les habitants de deux villages se trouvaient séparés par des pentes trop abruptes pour que les communications soient possibles ; pour se rencontrer et pour échanger leurs biens et leurs idées, il leur fallait descendre vers la mer puis remonter dans l'autre vallée ; quel long voyage de plusieurs kilomètres alors que 900 mètres seulement les séparaient ! Le tyran Polycrate qui les gouvernait voulait aussi construire un aqueduc amenant l'eau d'un village à l'autre.



Ils décidèrent alors de creuser un tunnel direct à travers la montagne. Chacun, bien sûr, devait creuser de son côté... Qu'auraient-ils alors pu faire sans les mathématiques ?

Car ce sont les mathématiques qui ont assuré la rencontre de leurs deux tunnels : il leur a fallu connaître pas mal de géométrie pour réussir à bien se diriger avec des parallèles et des perpendiculaires, et aussi faire bien des calculs pour conduire et interpréter les bonnes mesures d'angle et de distance. Le résultat fut remarquable : les deux tunnels se rejoignirent à six mètres près quelque part sous la montagne, et le percement de la galerie qui les réunit se fit alors rapidement.

La fusée Ariane

Aujourd'hui, les ingénieurs responsables des tirs de la fusée Ariane assurent eux aussi une très grande précision et, à partir d'un fabuleux vrombissement de moteurs alimentés par 3 000 tonnes de carburant et de milliers de logiciels de contrôle et de calculs, ils finissent par déposer quelques kilos de technologie sophistiquée sur la trajectoire prévue, comme une plume sur un tapis roulant.

En fait, la plupart des réalisations de notre monde existent maintenant grâce à une bonne dose de mathématiques : que ce soit leur conception (simulation 3D, calculs prévisionnels...), leur fabrication (engins robotisés, ordinateurs...) ou leur fonctionnement (optimisation, contrôle...). Et la sophistication des outils de calcul permet même de remplacer des expériences coûteuses et parfois dangereuses par leur simulation dans un monde virtuel où les mathématiques sont reines.

Aujourd'hui, notre monde moderne, avec ses industries, son économie, ses techniques, n'aurait pas pu exister et ne pourrait pas fonctionner sans les mathématiques : témoin typique, la fusée Ariane est bourrée de mathématiques qui ont défini sa structure, sa forme, ses fonctions, qui ont suivi sa fabrication, son lancement et déterminé son équilibre et sa trajectoire ; l'économie n'est qu'un vaste champ d'application du calcul différentiel ; dans le moindre des objets ou la moindre des activités, les mesures, les formes et les mouvements réclament l'intervention de modèles mathématiques qui optimisent les réalisations en les rendant plus efficaces, mieux adaptées à leurs objectifs. Même dans la vie courante, la manipulation des chiffres et des nombres, le sens de la logique et du raisonnement semblent très souvent des nécessités. Bref, pour comprendre notre monde, pour y vivre, il faudrait avoir assimilé et savoir appliquer une bonne dose de mathématiques.

Un modèle écologique

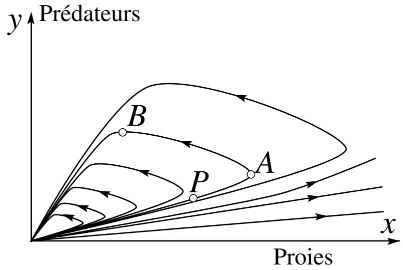
Voici un modèle mathématique (très simplifié) de description des évolutions d'une population de proies (x) aux prises avec des prédateurs (y). D'une part, chaque population a son propre taux de croissance naturel (supérieur à 1). D'autre part, chaque semaine :

– si les proies sont au moins deux fois plus nombreuses que les prédateurs ($y < 2x$), chaque prédateur mange une proie ;

– sinon, chaque prédateur qui le peut ne mange qu'une demi-proie et ceux qui ne trouvent rien à manger meurent.

Il n'est pas difficile de mettre au point un modèle mathématique de cette situation, dont la solution est donnée par une famille de courbes.

Une étude mathématique, même grossière, montre alors que l'évolution semaine après semaine est du type suivant :
la courbe ci-dessous, par exemple, raconte l'histoire suivante : en P, tant que les prédateurs ne sont pas trop nombreux, proies et prédateurs voient leur population augmenter régulièrement. Mais en A, les prédateurs deviennent trop nombreux et le nombre de proies commence à diminuer.
Cependant, les prédateurs continuent leur progression jusqu'en B, et là, il n'y a



plus assez de proies pour les prédateurs qui diminuent inexorablement en faisant aussi disparaître les proies. Triste histoire…

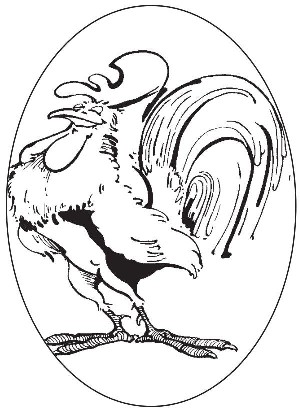
Ainsi, comme dans le modèle précédent, les mathématiques sont d'efficaces et nécessaires outils de prévision, d'invention et de contrôle. Elles proposent aux ingénieurs, aux biologistes, aux économistes, comme à de nombreux autres acteurs de notre monde, des modèles permettant l'analyse, la mise au point et le suivi d'utiles ou de merveilleuses réalisations.

Ces mathématiques-là, les ingénieurs, les biologistes, les économistes, qui auront à les utiliser, doivent évidemment les connaître. Mais servent-elles ou serviront-elles vraiment à nous tous, hommes de la rue, femmes de culture ou citoyens responsables ?

Car enfin, il suffit de regarder les hommes et les femmes autour de soi pour constater que 99 % d'entre eux ou elles ne font jamais le moindre appel à la plus petite connaissance mathématique !

Mieux même, on les voit souvent se vanter de ne rien connaître ou de ne rien comprendre aux mathématiques. Honte sur eux, bien sûr !

Prédateur…



Proie…

MATHÉMATIQUES ET CULTURE RÉPUBLICAINE

Dès son introduction dans l'école de la République, l'enseignement des mathématiques a revendiqué sa dimension culturelle :
« L'enseignement des mathématiques a pour objet de former les facultés intellectuelles des élèves … Après en avoir démontré les besoins et les motifs, on donnera à l'élève l'idée de les chercher et presque le moyen de les trouver lui-même.» (Condorcet)

$$\boxed{100} \xrightarrow[\times 0{,}2]{20\%} \boxed{20}$$

$$\boxed{100} \xrightarrow[\times 1{,}2]{+\,20\%} \boxed{120}$$

Pourquoi donc, en maths
5 × (– 100) = – 500 ???
Parce qu'on souhaite que la distributivité de la multiplication soit vraie <u>tout le temps</u> (c'est-à-dire aussi bien pour les positifs que pour les négatifs) :
Si
a × (b+c) = (a×b) + (a×c)
est vraie pour tout a, b, c, elle l'est aussi pour c = – b ; et donc :
0 = a × b + (a × (– b)).
D'où
a × (– b) = – (a × b).

Les pourcentages

• À tous les citoyens responsables qui ne veulent pas vraiment «vivre idiot», les mathématiques de base (celles qu'on apprend dans les écoles et les collèges) semblent constituer un bagage minimal. Par exemple, il serait bon que chacun ait bien compris la nature multiplicative ou additive des problèmes de tous les jours.

Comme exemple, vous avez sûrement entendu parler de la mésaventure de l'empereur des Indes Chiram voulant récompenser l'inventeur du jeu d'échecs, histoire dont la version moderne est celle du chef indien qui a vendu Manhattan aux immigrés européens. On raconte à ce sujet qu'en 1626 les Hollandais achetèrent l'île aux Indiens pour quelques barils de whisky (évalués à 24 dollars). Placés à 3 % l'an, leurs descendants disposeraient aujourd'hui de 1,5 million de dollars !

Plus quotidiennement, il vaut mieux savoir que, dans la plupart des calculs de pourcentages, ce ne sont pas des additions qu'il faut faire mais des multiplications.

Ainsi «prendre x % de A», c'est « multiplier A par $\frac{x}{100}$ », et

«augmenter B de y %», c'est «multiplier B par $1+\frac{y}{100}$ ».

Voilà pourquoi les gouvernements préfèrent augmenter certaines taxes en plusieurs fois car les gens se trompent dans l'évaluation des pourcentages successifs. Par exemple, deux augmentations successives de 25 % font plus qu'une seule augmentation de 50 % (l'interprétation spontanée en termes d'addition est à la fois tentante et trompeuse). En effet, une « augmentation de 25 % » équivaut à une « multiplication par 1,25 ». Donc deux augmentations successives équivalent à une multiplication par 1,25 × 1,25, c'est-à-dire par 1,5425.

Ce qui fait une augmentation globale supérieure à 54 % !

$$\begin{tikzcd} \boxed{} \arrow[r, "+\,25\%", "\times 1{,}25"'] \arrow[rr, bend right, "\times 1{,}5425"', "+\,54{,}25\%"'] & \boxed{} \arrow[r, "+\,25\%", "\times 1{,}25"'] & \boxed{} \end{tikzcd}$$

Peut-on comprendre quelque chose en mathématiques ?

Stendhal et la règle des signes

Avant d'écrire *le Rouge et le Noir* puis *la Chartreuse de Parme*, Stendhal était un élève studieux qui aimait les mathématiques «avec enthousiasme». Comme beaucoup d'élèves, il voulait vraiment comprendre ce qu'on lui faisait faire. Or, il n'était jamais arrivé à «comprendre» la règle des signes que lui enseignait son professeur de mathématiques.

«*Comment il se faisait que : moins par moins donne plus ?», écrit-il dans* la Vie de Henry Brulard, *car «en supposant que les quantités négatives soient les dettes d'un homme, comment en multipliant une dette de 100 francs par une dette de 5 francs, cet homme parviendra-t-il à avoir une fortune positive de 500 francs ?»*

Essayons d'y voir un peu plus clair, car finalement, avec ces histoires de dettes, Stendhal complique plutôt la situation au lieu de la rendre simple.

En mathématiques, il est bien vrai que 5 × (– 100) = – 500, mais les nombres ne sont que des objets de notre esprit (Lazare Carnot les appelaient, en 1806, des «êtres de raison») ; ce ne sont pas des choses que l'on peut toucher. Heureusement, il arrive que ces nombres puissent être représentés par des objets et qu'ils interviennent dans des situations concrètes. Ainsi, on voit bien ce que sont 5 pommes, 5 voitures ou même 5 kilomètres.

Et quand on pense à la multiplication $100 \times 5 = 500$, on « comprend » que 500 représente 100 fois plus de pommes que 5, ou 100 fois plus de voitures, ou 100 fois plus de kilomètres.

Ici, « comprendre » veut dire « donner un sens, une signification » aux nombres et aux opérations ; cependant, ce ne sont pas des mathématiques que l'on comprend, mais plutôt des circonstances de la vie courante. Et la vie courante peut devenir très compliquée, au point qu'on ne puisse plus la « comprendre »...

Alors que les mathématiques, justement, sont en dehors de la vie courante et de ses complications. Et c'est pourquoi elles deviennent miraculeusement plus simples et plus utiles.

Par exemple, il y a 98 personnes quelque part et chacune a 5 pommes, combien y a-t-il de pommes ?

Pour répondre simplement, il faut « oublier » qu'il s'agit de pommes et faire des opérations avec des nombres « mathématiques ».

Alors on dit $98 = 100 - 2$

$98 \times 7 = (100 \times 7) - (2 \times 7)$

$98 \times 7 = 700 - 14$

Le résultat est 686.

Si on pense aux pommes, on est fichu ! On se demande ce que représente « moins 10 pommes » ou « moins 2 pommes » et on n'y « comprend » plus rien.

Et c'est souvent cela en mathématiques : il n'y a pas à « comprendre », au sens de « donner une signification ».

Ce qu'il y a à faire, c'est appliquer les bonnes règles avec un peu d'astuce ; et ce qu'il faut vraiment comprendre, c'est que les règles sont ce qu'elles sont parce qu'elles marchent ensemble sans jamais aboutir à une contradiction.

Réfléchissez bien à ceci : si tout ce qu'on dit en mathématiques pouvait avoir une signification concrète, alors il n'y aurait pas de mathématiques ! Car si on pouvait toujours parler de pommes, de voitures ou d'argent, ce ne serait pas la peine de parler avec de nombres abstraits.

Or, justement, ce qui fait la force des nombres, c'est qu'ils peuvent traduire des situations concrètes très différentes. Parfois, ils représentent de l'argent, parfois des kilomètres, parfois des pommes...

La bouteille et le bouchon

Voici d'ailleurs sur ce sujet une histoire vécue. Dans une revue, on avait posé le petit problème suivant : une bouteille et un bouchon pèsent 110 g, la bouteille pèse 100 g de plus que le bouchon et les deux ensemble pèsent 110 g. Combien pèse le bouchon ?

Évidemment, ce n'est pas 10 g, comme on aurait envie de le dire. Si le bouchon pesait 10 g, la bouteille pèserait 110 g, 110 + 10 ça ferait 120. Bon, il y a un petit truc à trouver.

Cette histoire se passait dans un bureau où il y avait des gens, des secrétaires, des étudiants, etc., et donc ils ont discuté de ce problème.

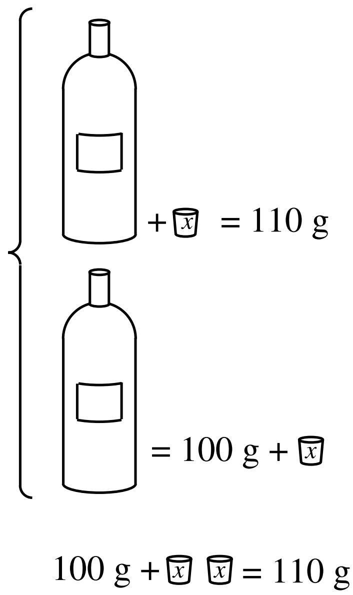
Au bout d'un moment, quelqu'un a dit : « ça a l'air d'être des mathématiques, on va mettre des lettres ». Alors, prenons le bouchon, appelons-le x, écrivons ce qu'on sait sur ce bouchon ; $100 + x$ (c'est le poids de la bouteille) $+ x$ (qui est le poids du bouchon), tout cela vaut 110 g.

Alors, donc $100 + 2x = 110$; on enlève 100 de chaque côté, ce qui fait $2x = 10$ donc $x = 5$; le poids du bouchon est donc 5 g.

Il est facile de se persuader que 5 g est le poids du bouchon en faisant le calcul à l'envers :

5 + 100 = 105 pour la bouteille ;

105 + 5 = 110, OK.



Sur le mécanisme de l'obstacle créé par une ancienne connaissance à l'apparition d'une nouvelle, on lira avec intérêt *la formation de l'esprit scientifique* (1938) de Gaston Bachelard.

Mais alors, parmi les gens qui avaient regardé cette démonstration, l'un s'est approché et a dit : « Voilà, il y a quelque chose que *je ne comprends pas,* là tu as marqué $2x$ et moi je ne vois qu'**un** bouchon. »

C'est très caractéristique, c'est même exemplaire : il y a écrit $\mathbf{2}x$, et la personne cherche les deux bouchons. Elle ne les « voit » pas et elle ne « comprend pas. »

Il n'y a qu'une chose à répondre à cette personne : c'est qu'il n'y a pas à comprendre s'il y a ou non deux bouchons.

Précisément, entre le moment où on a écrit $100 + x + x = 110$ et celui où on a écrit $x = 5$, il n'y a « rien à comprendre », en ce sens qu'on passe d'une ligne à une autre ligne de calcul par des règles de calcul (qu'on peut avoir comprises un jour, mais sur lesquelles il n'y a pas lieu, ici, de s'appesantir : le calcul est devenu un « réflexe »).

Évidemment, au moment où on débute la formulation mathématique, il faut comprendre les éléments de la situation pour la traduire par une formule ou une équation.

Après avoir appelé x le poids du bouchon, il faut réussir à traduire l'égalité qui provient des données du problème.

Là, il y a une activité de compréhension. Mais ensuite, il faut avancer de façon mécanique, avec le jeu habituel des règles de calcul. Et, tout à fait à la fin, il y a encore quelque chose à comprendre : si on trouve $x = 5$, alors, c'est que le bouchon pèse 5 g.

Entre la mise en forme du problème et sa conclusion, il faut donc accepter une certaine perte de signification « concrète », car, nous l'avons déjà dit, si vous aviez la possibilité de toujours parler en termes concrets, les mathématiques n'existeraient pas.

Le concret et l'abstrait
La question de la réalité et de l'imaginaire

Après ces quelques exemples, revenons un peu sur l'extraordinaire efficacité mathématique et sur sa nature.

Tout se passe comme si les mathématiques proposaient un autre monde, au-dessus du monde réel. À certains endroits, les deux mondes se correspondent mais chacun a sa géographie et ses chemins : le monde réel est complexe, immensément complexe, et le monde mathématique semble mieux structuré et il semble plus aisé de s'y reconnaître.
En fait, c'est un miracle qu'il soit parfois possible de remplacer un morceau de réalité par un bout de chemin mathématique.

Évidemment, cela nécessite de « jouer le jeu », c'est-à-dire d'abandonner les règles compliquées du monde réel pour celles, cohérentes, du monde mathématique.

Peut-être est-ce dans ce phénomène qu'il faut chercher l'origine du blocage que certains font sur les mathématiques : ils ne veulent pas, ils ne peuvent pas accepter la perte de signification. On se trouve là exactement devant ce que le philosophe des sciences français Gaston Bachelard nomme un « obstacle » à la connaissance : ce que l'on sait déjà fait « obstacle » à une nouvelle connaissance.

Ici, par exemple, la connaissance qui fait obstacle est très utile et importante : dans toute situation, il est essentiel de préserver la signification de ce que l'on fait.

Et voilà que, tout à coup, il faudrait abandonner cette signification ! Pour franchir cet obstacle, il faut être totalement persuadé que l'on va y gagner et donc, dans notre cas, que les résultats fournis par les mathématiques valent cette relativité nouvelle qu'il faut attribuer au sens des choses.

Pourquoi apprendre et enseigner les mathématiques ?

L'opinion d'un philosophe

Et aujourd'hui, on semble avoir bien compris cette double nécessité, ce balancement entre l'esprit et les choses ; et on en reconnaît l'importance à la fois pour la vie professionnelle et pour l'enseignement. Relisons, par exemple, ce que pensait Alain sur l'éducation et sur les matières qu'il faudrait enseigner aux élèves :

« *Un grand homme d'État a exprimé en deux mots ce que chaque être humain doit savoir le mieux possible : géométrie et latin.*

Élargissons ; entendons par latin l'étude des grandes œuvres, et principalement de toute la poésie humaine. Alors, tout est dit.

La géométrie est la clef de la nature. Qui n'est point géomètre ne percevra jamais bien ce monde où il vit et dont il dépend. Mais plutôt, il rêvera selon la passion du moment, se trompant lui-même sur la puissance antagoniste, mesurant mal, comptant mal, nuisible et malheureux. Aussi je n'entends point qu'on doive enseigner toute la nature ; non, mais régler l'esprit selon l'objet, d'après la nécessité clairement aperçue.

Il n'en faut pas plus, mais il n'en faut pas moins. Celui qui n'a aucune idée de la nécessité géométrique manquera l'idée même de nécessité extérieure. Toute la physique et toute l'histoire naturelle ensemble ne la lui donneront point. Donc peu de science, mais une bonne science, et toujours la preuve la plus rigoureuse. Le beau de la géométrie est qu'il y a des étages de preuves, et quelque chose de net et de sain dans toutes. Que la sphère et le prisme, donc, nous donnent des leçons de choses. À qui ? À tous. Il est bien plaisant de décider qu'un enfant ignorera la géométrie parce qu'il a peine à la comprendre ; c'est un signe au contraire qu'il faut patiemment l'y faire entrer.

Thalès ne savait point toute notre géométrie ; mais ce qu'il savait, il le savait bien. Ainsi, la moindre vue de la nécessité sera une lumière pour toute une vie. Ne comptez donc pas les heures, ne mesurez pas les aptitudes, mais dites seulement : "Il le faut."

La poésie, elle, est la clé de l'ordre humain, et, comme j'ai dit souvent, le miroir de l'âme.

Donc, toute la poésie à tous, autant qu'on pourra ; et toute la langue humaine, autant qu'on pourra. L'homme qui n'est pas discipliné selon cette imitation n'est pas un homme.

Géométrie et poésie ; cela suffit. L'une tempère l'autre. Mais il faut les deux. Homère et Thalès le conduiront par la main... »

(Alain, *Propos sur l'éducation*, 1932.)

L'utile et l'agréable

Et voilà que notre question initiale « à quoi servent les mathématiques ? » prend un nouveau sens. Un sens relatif, intéressant non les spécialistes, mais ceux qui sont censés les apprendre pour qu'elles leur servent à eux. Alors la question n'est plus tout à fait la même et devient « à quoi sert d'apprendre les mathématiques ? » ou plus précisément encore « à quoi sert d'enseigner les mathématiques ? ».

C'est elle, la vraie question que se posent la plupart des lycéens et tous ceux qui croient avoir du mal avec les mathématiques. Et bien sûr, nous allons répondre à cette question, clairement et honnêtement.

Cependant, comme le faisait Socrate et comme le font toujours, depuis leurs ancêtres grecs, les éducateurs qui respectent leurs élèves, nous préférons répondre d'abord par d'autres questions. Ainsi peut-être chacun pour-

Emile CHARTIER
dit "Alain"
1868 - 1951

La géométrie est la clef de la nature. Qui n'est point géomètre ne percevra jamais bien ce monde où il vit et dont il dépend.