Baccalauréat C Abidjan juin 1974

EXERCICE 1

À tout complexe z on associe le point M d'affixe z du plan euclidien associé à $\mathbb{C}$.
Soit T la transformation de ce plan qui à M d'affixe z fait correspondre M' d'affixe

$$z' = z^2 + 1.$$

1. T est-elle bijective ?
2. T a-t-elle des points doubles ?
3. Quel est l'ensemble des points dont l'image appartient à Ox ?
4. Quel est l'ensemble des points dont l'image appartient à Oy ?

EXERCICE 2

Soit f et g les fonctions numériques de $[-3~;~+3]$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = 2^{\mathrm{E}(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = 2^x.$$

(On rappelle que si $x \in [n~;~n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{E}(x) = n$).

1. Étudier ces fonctions f et g et tracer leur représentation graphique dans un même repère orthonormé.
2. Calculer $A = \displaystyle\int_{-3}^{+3} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_{-3}^{+3} g(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Hachurer un ensemble de points dont l'aire est $B - A$.

PROBLÈME

Dans ce problème, on désigne par :

— E un plan euclidien associé à un plan vectoriel (euclidien) et rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$,
— α et β deux réels non nuls,
— e l'application identique de E,
— D et D' les droites d'équations respectives $x\sqrt{3} - y = 0$ et $x + y\sqrt{3} = 0$,
— $T_{\alpha,\,\beta}$ l'application de E dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M'} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{O}P} + \overrightarrow{\mathrm{O}Q}.$$

P et Q étant respectivement le point de D d'abscisse x et le point de D' d'ordonnée y.

1. Écrire les formules analytiques de $T_{\alpha,\,\beta}$.
En déduire que $T_{\alpha,\,\beta}$ est une application affine dont on appellera $f_{\alpha,\,\beta}$ l'endomorphisme associé.
2. Montrer que $T_{\alpha,\,\beta}$ est bijective et que $T_{\alpha,\,\beta}^{-1}$ peut s'écrire sous la forme

$$T_{\alpha,\,\beta}^{-1} = aT_{\alpha,\,\beta} + b\mathrm{e}$$

où a et b sont deux réels que l'on calculera en fonction de α et β.
3. À quelle condition portant sur α et β existe-t-il des droites qui soient :

a. invariantes par $T_{\alpha,\,\beta}$;

b. orthogonales à leur image ?

(On ne cherchera pas à déterminer l'équation de ces droites).

c. Comment choisir α et β pour que $T^2_{\alpha,\,\beta}$ soit une homothétie ?

Déterminer alors son centre et son rapport.

4. Déterminer les applications $T_{\alpha,\,\beta}$ qui sont des isométries affines.

Préciser celles qui sont des rotations et celles qui sont des symétries orthogonales en donnant leurs éléments caractéristiques.

5. Plus généralement, déterminer les applications $T_{\alpha,\,\beta}$ qui sont des similitudes.

Donner alors :

a. le centre et le rapport de celles qui sont directes,

b. l'axe et le rapport de celles qui sont indirectes.

6. On se place dans le cas particulier où $\beta = -\alpha$; on choisit un point A de coordonnées $\left(x_0\,;\ y_0\right)$ et l'on pose :

$$A_1 = T_{\alpha,\,-\alpha}(\text{A}) \qquad A_2 = T_{\alpha,\,-\alpha}\left(A_1\right)$$

et pour tout $n \geqslant 2$, $\quad A_n = T_{\alpha,\,-\alpha}\left(A_{n-1}\right)$.

Calculer en fonction de x_0, y_0 les coordonnées de A_1 et A_2 ; puis, en fonction de x_0, y_0, n, celles de A_n.