Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Abidjan

EXERCICE 1

On considère la fonction numérique réelle définie par :

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

1. Étudier la variation de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé, l'unité choisie mesurant 2 centimètres.

   Construire la tangente à l'origine ; la courbe possède-t-elle une demi-tangente au point d'abscisse $x = -1$?

2. Déduire de l'étude précédente le tracé des courbes suivantes :

   a. (C') d'équation $y = \sqrt{x^3 + x^2}$

   b. (Γ) d'équation $y^2 - x^3 - x^2 = 0$.

   (On tracera ces courbes avec soin dans des repères distincts).

EXERCICE 2

On considère dans le plan complexe les deux sous-ensembles suivants :

— le demi-plan P formé de l'ensemble des points d'affixe $z = a + b\text{i}$, où $b > 0$, a et b étant réels ;

— le disque D formé de l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z| < 1$.

1. Montrer que, si l'on associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z - \text{i}}{z + \text{i}},$$

   on obtient une bijection de P sur D.

2. Vérifier géométriquement que si $M \in$ P, alors $M' \in$ D, et réciproquement ; on utilisera les points A et B d'affixes respectives i et $-$i, et l'on exprimera OM' en fonction de MA et MB.

EXERCICE 2

Dans ce problème, on désigne par :

— E un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel $\mathcal{U}$ et rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$;

— p un réel quelconque ; e la base de l'exponentielle népérienne ;

— f_p l'application de E dans E qui à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& (1+p)\text{e}^p x - p\text{e}^p y\\ y' &=& p\text{e}^p x + (1-p)\text{e}^p y\end{array}\right.$$

— $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications f_p lorsque p décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Les parties B, C et D sont indépendantes et peuvent être abordées dans un ordre quelconque.

Partie A

1. Montrer que pour tout p l'application f_p est bijective ; déterminer f_p^{-1} et montrer que $f_p^{-1} \in$ E.

2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ muni de la loi $\circ$ (composition d'applications) est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$; retrouver, en appliquant ce résultat, l'expression de f^{-1}.

Partie B

Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire définie sur E par :

$$M\mathscr{R}M' \iff \exists p \in \mathbb{R}, \quad M' = f_p(M)$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

On notera Γ la classe d'équivalence d'un point donné $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ du plan, c'est-à-dire l'ensemble des points $M = f_p\left(M_0\right)$ lorsque p décrit $\mathbb{R}$.

2. On suppose dans cette question que $x_0 = y_0$.

Déterminer la classe d'équivalence Γ de M_0 ; préciser sa nature, discuter suivant la position de M_0.

3. On suppose dans cette question que $x_0 \neq y_0$.

a. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M(x\ ;\ y)$ appartienne à Γ est que l'on ait :

$$\frac{x_0 y - y_0 x}{y_0 - x_0} = (y - x)\text{Log}\,\frac{y - x}{y_0 - x_0}.$$

b. Montrer l'existence sur l'axe des abscisses d'un point unique M_1 élément de Γ (on calculera son abscisse x_1 en fonction de x_0 et y_0).

4. Soit A le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ 0)$ avec $\alpha \neq 0$. On désigne ici par Γ_α la classe d'équivalence de A.

a. Montrer que Γ_α peut être représentée paramétriquement par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha m(1 + \text{Log}\, m) \\ y & = & \alpha m \text{Log}\, m \end{array}\right.$$

et que Γ_α est située dans un demi-plan ayant pour frontière la bissectrice des axes.

b. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, Γ_α est globalement invariante par toute transformation f_p de l'ensemble $\mathscr{P}$ et que Γ_α se déduit de Γ_1 par une transformation géométrique simple.

5. La relation $\mathscr{R}$ détermine une partition du plan E. En utilisant les résultats précédents déterminer toutes les classes de cette partition; retrouver ainsi le fait que les courbes Γ_α ne coupent pas la bissectrice des axes,

Partie C

Dans cette partie uniquement, on se limite au cas $p = 1$.
Un point M a pour image $M' = f_1(M)$.
On suppose que M décrit la courbe (C) d'équation :

$$2x^2 + \lambda y^2 - 4\lambda xy - \frac{2}{\text{e}}x + \frac{1}{\text{e}}y - \frac{1}{\text{e}^2} = 0$$

où λ est un paramètre réel, et e désigne la base de l'exponentielle népérienne.

1. Vérifier que (C) est non vide.

2. Former l'équation de la courbe (C') image par f_1 de la courbe (C). Préciser la nature de la courbe (C') selon les valeurs du paramètre λ.

Partie D

Dans cette partie, on se place dans le plan vectoriel $\mathcal{U}$ associé à E et on désigne par $\overline{f_p}$ l'endomorphisme de $\mathcal{U}$ associé à l'application affine f_p.

1. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $\overline{f_p}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$.
2. Montrer que quel que soit le vecteur $\overrightarrow{v}$ il existe un vecteur $\overrightarrow{u_p}$ (que l'on précisera) tel que :

$$\text{si } \overrightarrow{v} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}, \quad \text{alors } f_p\left(\overrightarrow{v}\right) = \left(\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{u_p}\right)\mathrm{e}^p.$$

3. Calculer, pour p et p' quelconques, $\left(\overline{f_{p'}} \circ \overline{f_p}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)$ en utilisant la question précédente .
   Retrouver ainsi une démonstration du résultat de la question A - 2. concernant l'isomorphisme de $(\mathscr{P},\ \circ)$ avec $(\mathbb{R},\ +)$.