Concours Accès 25 avril 2023

MATHÉMATIQUES

durée de l'épreuve : 3 h

Exercices 1 à 5 : Raisonnement logique

1. Une famille est composée des parents (Yves et Véronique) et de leurs quatre enfants (Louis, Simon, Pierre et Élise). Les 6 personnes viennent de se peser.

Pierre pèse plus que sa mère.

Louis pèse la moitié du poids de Véronique.

Élise pèse plus que Louis et pèse moins que Simon.

Le poids de Simon est le tiers du poids de son père qui pèse plus que son épouse.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Louis a le poids le plus faible de la famille.
B. Dans la famille, Yves a le poids le plus élevé.
C. Le poids d'Yves est égal à une fois et demie celui de sa femme.
D. Simon et Élise réunis pèsent plus que leur père.

2. Sophie souhaite reconstituer l'arbre généalogique de sa famille. Mais elle ne dispose que de quelques éléments :

- Aucun membre de la famille n'a le même prénom;
- Son père avait trois oncles, c'est-à-dire des frères de son père : Xavier, Yves et Zénobe;
- Xavier, Yves et Zénobe ont eu quatre garçons (Alexis, Bastien, Cédric et Damien) et deux filles (Émilie et Florence);
- Yves a eu la famille la plus nombreuse;
- Émilie est enfant unique;
- Damien n'a qu'un frère et pas de sœur;
- Florence est la sœur d'Alexis et a un autre frère;
- Xavier n'a pas eu de fille;
- Le seul frère de Cédric est plus âgé que Bastien.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le père d'Émilie avait trois frères.
B. Yves a eu 3 enfants.
C. Le frère de Damien est Cédric.
D. Le grand-père de Sophie s'appelait Yves.

3. Un tournoi d'échec accueille 128 joueurs. Le tournoi se joue en confrontation directe après tirage au sort. Chaque partie est à élimination directe. Le vainqueur continue le tournoi et celui-ci s'arrête pour le perdant. 6 300 coups ont été joués au cours du tournoi.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. 127 parties ont dû être organisées pour décider du vainqueur du tournoi.
B. Le nombre moyen de coups joués par partie est supérieur à 25.

C. Le nombre moyen de parties par joueur est supérieur à 2.
D. Le vainqueur du tournoi aura battu au total 8 adversaires.

4. Un père lègue son héritage de 150 000 €à ses 5 descendants. Les 5 parts léguées ne sont pas égales. Mais on sait que chaque descendant recevrait la même part :

- si le père donnait 10 000 € de plus au premier;
- si le père reprenait 1 000 € au deuxième;
- si le père multipliait par 1,5 la part du troisième;
- si le père divisait la part du quatrième par $1,5$;
- et que le père reprenait 4 000 € au cinquième.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le premier et le troisième ont reçu des parts d'une valeur identique.
B. C'est le deuxième qui a reçu la part la plus élevée.
C. La part la plus élevée est égale à $1,5$ fois la 2^{e} part la plus élevée.
D. La moyenne des parts léguées est de 28 500 €.

5. Pour le premier semestre de l'année, une entreprise reçoit une aide égale à 3 400 € pour organiser des formations à son personnel. L'entreprise organise pour ses 200 salariés, deux formations, d'une journée chacune et à des dates différentes du premier semestre de l'année :

- La formation A : maîtriser un tableur
- La formation B : comptabilité avancée.

Le service des ressources humaines a confié ces formations à deux intervenants externes : M. Xavier pour la formation A et M^{me} Dupond pour la formation B. Les intervenants et le service des ressources humaines ont trouvé un accord pour un tarif journalier en fonction du nombre de participants :

- 100 € par participant pour les dix premiers inscrits à la formation A et 20 € pour chaque participant supplémentaire;
- 120 € par participant pour les quinze premiers inscrits à la formation B et 25 € pour chaque participant supplémentaire.

L'accord n'inclut pas les frais de repas et déplacement. Ils sont facturés par les intervenants et s'ajoutent aux tarifs liés aux interventions. Pour les frais de repas et déplacement, M. Xavier a facturé 100 € et M^{me} Dupond 200 €.
On sait que :

- 30 salariés ont participé à une et une seule des deux formations proposées;
- 160 salariés n'ont suivi aucune des deux formations proposées;
- M. Xavier a encaissé au total 1 200 €.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. 10 salariés ont suivi les deux formations proposées.
B. 20 salariés ont suivi la formation de M. Xavier.
C. M^{me} Dupond a encaissé au total 2 300 €.
D. Compte tenu de l'aide reçue, ces formations n'ont coûté à l'entreprise qu'une somme équivalente aux frais de repas et de déplacement des intervenants.

Exercices n^{o} 6 à 10 : Raisonnement mathématique

6. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x + \ln(-2x + 2).$$

On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

A. f est définie sur $]l\ ;\ +\infty[$
B. $f'(x) = \dfrac{x}{x-1}$
C. f est concave sur $\mathcal{D}_f$
D. f admet un maximum en 0.

7. On considère un dé qui a été truqué pour que :

- le numéro 6 sorte une fois sur trois;
- les autres numéros (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5) ont chacun la même probabilité de sortir.

On lance ce dé une fois, et on note :

- l'évènement « le 6 est sorti »;
- A : l'évènement « le 1 est sorti »;
- T : l'évènement « le 3 est sorti »;
- I : l'évènement « il est sorti un numéro impair ».

A. Les évènements S et A ne sont pas indépendants.
B. Les évènements T et I sont incompatibles.
C. Les évènements S et I sont équiprobables.
D. $p(A) = \dfrac{1}{5}$

8. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right).$$

On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

A. Sur $\mathcal{D}_f$, $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$
B. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - [-2\ ;\ 2]$
C. Sur $\mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$
D. f est paire.

9. Deux évènements A et B d'un même univers vérifient :
$p(A) = 0,2 \quad p(B) = 0,8 \quad p(A \cap B) = 0,1$
Deux évènements indépendants C et D d'un même univers vérifient :
$p(C) = 0,3 \quad p(C \cup D) = 0,65$

A. $p(A \cap B) = 0,16$
B. $p(A \cup B) = 0,9$
C. $p(D) = 0,5$
D. C et D sont des évènements indépendants.

10. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

A. L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

B. On a $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)}$

C. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

D. La fonction f possède deux extremums.

Exercices n$^{\text{o}}$ 11 à 15 : Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

11. Monsieur Martin, directeur d'une entreprise, projette d'aménager un local disponible, en cafétéria.

Afin de connaître le pourcentage de salariés favorables à la création de cette cafétéria, Monsieur Martin réalise, le premier février de cette année, une enquête auprès de l'ensemble de son personnel, composé de 300 salariés. Dans cette entreprise, deux tiers des salariés sont des femmes.

Les résultats de cette enquête sont les suivants :

- 60 % des femmes sont favorables à la création d'une cafétéria ;
- Deux tiers des salariés (hommes et femmes confondus) sont favorables à la création d'une cafétéria.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Le nombre de femmes favorables à la création d'une cafétéria est égal à 120.

B. La proportion d'hommes favorables à la création d'une cafétéria est inférieure à 60 %.

C. Le nombre d'hommes qui ne sont pas favorables à la création d'une cafétéria est inférieur à 30.

D. 35 % des salariés favorables à la création d'une cafétéria sont des hommes.

12. Suite aux résultats de ce sondage, Monsieur Martin décide donc le lancement de ce projet dont la planification des tâches est donnée dans le tableau ci-dessous :

Tâche	Libellé	Durée en jours	Tâches antécédentes
A	Plomberie	3	
B	Électricité	2	
C	Isolation phonique	3	A et B
D	Pose de l'évier	1	A
E	Peinture (portes et plafond)	1	C et D
F	Carrelage (sol et murs)	3	C, D et E
G	Installation mobilier	1	F

Une tâche débute toujours en début de journée et se termine toujours en fin de journée. Une tâche ne peut débuter que lorsque les éventuelles tâches antécédentes sont terminées.

Pour mieux visualiser l'enchaînement des différentes tâches, un calendrier peut être réalisé selon le modèle suivant :

Exemple fictif :

$$\text{Jour} \rightarrow \underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{\text{Tâche M}} \qquad \underbrace{\underbrace{4 \quad 5}_{\text{Tâche N}} \qquad \underbrace{6 \quad 7 \quad 8}_{\text{Tâche O}}}_{\text{Tâche P}}$$

Lecture du calendrier de l'exemple :

- La tâche M dure 3jours ;
- La tâche N dure 2 jours et ne peut commencer avant la fin de la tâche M (tâche antécédente) ;
- La tâche O dure 3 jours et ne peut commencer avant la fin de la tâche N (tâche antécédente) ;
- La tâche P dure 4 jours et ne peut commencer avant la fin de la tâche M (tâche antécédente).

À des informations précédentes, on peut conclure que :

A. La durée totale des travaux est égale à 14 jours.
B. Les travaux de peinture des portes et du plafond peuvent démarrer le 4^{e} jour.
C. Si les travaux d'isolation duraient un jour de plus que prévu (4 jours au lieu de 3 jours), cela décalerait la fin de l'ensemble des travaux d'un jour.
D. Si les travaux d'électricité duraient un jour de plus que prévu (3 jours au lieu de 2 jours), la durée totale des travaux serait inchangée.

13. Le local aménagé en cafétéria est une pièce rectangulaire dont les dimensions sont les suivantes

- Largeur = 5 mètres ;
- Longueur = 10 mètres ;
- Hauteur = 3 mètres.

Sur chacun de ses quatre murs, ce local est équipé d'une porte rectangulaire dont la largeur est 1,25 mètre et dont la hauteur est de 2 mètres. Monsieur Martin opte pour la pose d'un carrelage sur le sol et sur tous les murs du local et pour la pose d'une peinture sur le plafond et les portes.
Monsieur Martin visite un premier fournisseur de carrelage qui lui propose un carrelage mural et un carrelage pour le sol dont le coût total est de 4 500 €.
Lors de la visite auprès d'un deuxième fournisseur de carrelage, Monsieur Martin est séduit par deux produits. Le prix au m^2 du carrelage mural de ce deuxième fournisseur est supérieur de 5 € à celui du premier fournisseur.
Mais pour être compétitif, le deuxième fournisseur propose à Monsieur Martin, un prix au m^2 sur le carrelage au sol égal à la moitié de celui du premier fournisseur car il en possède une importante quantité en stock.
Monsieur Martin choisit le deuxième fournisseur dont la facture totale est de 3 650 €.
À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. La surface totale à carreler (sol + murs) est égale à 140 m^2
B. Le prix au m^2 du carrelage mural du deuxième fournisseur est égal à 25 €.
C. Le prix au m^2 du carrelage au sol du premier fournisseur est égal à 45 €.
D. La remise accordée par le deuxième fournisseur pour le carrelage au sol est égale à 1 250 €.

14. Pour la peinture du plafond et des portes, quatre types de peintures (P1, P2, P3 et P4) figurent dans l'ensemble des choix de Monsieur Martin qui souhaite réaliser 3 couches. Pour chacun des 4 types de peintures, un litre de peinture couvre une surface de 8 m^2.
Il dispose des notes (de 0 à 10) sur 4 caractéristiques de ces 4 types de peintures :

Type peinture	Résistance aux chocs	Résistance à l'humidité	Prix	Éventail de couleurs
P1	8	10	4	5
P2	9	7	4	5
P3	6	7	8	7
P4	5	6	8	8

Pour faire son choix, Monsieur Martin accorde une importance différente aux quatre caractéristiques et leur donne les poids suivants :

- 30 % pour la résistance aux chocs ;
- 20 % pour la résistance à l'humidité ;
- 40 % pour le prix ;
- 10 % pour l'éventail des couleurs.

Les données de cet exercice peuvent être présentées sous forme de matrice. Définition d'une matrice : Soient n et p deux entiers positifs, on appelle matrice A de dimensions $(n,\, p)$, tout tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes de la forme :

$$A_{(n,\,p)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{ij} est donc le terme général de la matrice A se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.
Produit de deux matrices $A \times B$:
Pour pouvoir réaliser le produit de deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice A soit égal au nombre de lignes de la deuxième matrice B.
On appellera alors C la matrice égale à $A \times B$ avec :

- a_{ij} qui est le terme général de la matrice A
- b_{ij} qui est le terme général de la matrice B
- c_{ij} qui est le terme général de la matrice C

$C_{(n,q)} = A_{(n,p)} \times B_{(p,q)}$ est une matrice à n lignes et q colonnes avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}bpj$$

Exemple : Déterminer $C = A \times B$ avec :

$$A_{(2,\,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_{(2,\,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_{(2,\,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times B_{(2,\,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.
Avec par exemple : $2 = 1 \times 2 + 0 \times 1$.
Explication des calculs : c_{11} se trouve sur la première ligne et la première colonne de la matrice C. Pour trouver sa valeur, on fait le produit de la première ligne de la matrice A par la première colonne de la matrice B de la façon suivante :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2.$$

On appelle C la matrice des caractéristiques des 4 types de peintures et P la matrice des poids attribués par Monsieur Martin avec :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0, \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

La matrice des notes attribuées par Monsieur Martin sera notée N (avec $N = C \times P$) et son terme général sera noté n_{ij}.

Monsieur Martin achètera le type de peinture qui a obtenu la note la plus forte.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. N est une matrice à une ligne et quatre colonnes.

B. La note la plus forte attribuée par Monsieur Martin est égale à 7,1.

C. n_{41} correspond à la note la plus faible.

D. Monsieur Martin doit acheter 22,5 litres de peinture de type P2.

15. Dans sa cafétéria, Monsieur Martin souhaite moduler le prix d'un repas (entrée + plat + dessert) en fonction du salaire mensuel du salarié.

On retient 2 tranches de salaires et donc 2 prix de repas différents.

Le prix du repas de la tranche 2 est majoré de 25 % par rapport à celui de la tranche 1.

Tranche des salaires	Prix du repas en euros
1	x
2	7

On sait que 40 % des salariées femmes sont dans la tranche 1, que 70 % des salariés hommes sont dans la tranche 2 et qu'il n'y a pas eu de mouvement de personnel depuis l'enquête réalisée le 1er février de cette année.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. $x \leqslant 5,25$

B. 110 salariés hommes sont dans la tranche 1.

C. Si tous les hommes déjeunent à la cafétéria (un repas par personne), ils règleront au total 658 €.

D. Si tout le personnel déjeune à la cafétéria (un repas par personne), un jour donné, la recette de la cafétéria sera supérieure à 2 000 €.