

Concours Accès 2013
MATHÉMATIQUES
 durée de l'épreuve : 3 h

Exercices n° 1 à 6 : Raisonnement logique

1. On s'intéresse à trois membres du personnel d'une entreprise : Xavier, Yves et Zoran.

On sait qu'ils occupent chacun l'un des postes de directeurs des services suivants : service marketing, service des ressources humaines et service financier.

Par ailleurs on sait aussi que :

- Le financier est le moins ancien dans l'entreprise et qu'il n'a pas d'enfants à charge.
- Xavier a des enfants à charge.
- Yves est plus ancien dans l'entreprise que le directeur marketing.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

- A. Xavier est directeur financier.
 - B. Yves est directeur des ressources humaines.
 - C. Zoran est le moins ancien.
 - D. Le directeur des ressources humaines est le plus ancien des trois.
2. Une société de location propose à une entreprise de travaux publics trois types de contrats pour la location d'un engin. Ces contrats sont valables à partir du 1^{er} janvier 2012 :
- Contrat n° 1 : le montant mensuel de la location est de 2 000 € et ce montant mensuel augmentera de $\alpha = 10\%$ chaque année au 1^{er} janvier (la première augmentation ayant donc lieu le 1^{er} janvier 2013).
 - Contrat n° 2 : le montant annuel de la location est de $a = 41\,000$ € pour 2012 et il augmente de $b = 4\,000$ € chaque année, dès le 1^{er} janvier 2013.
 - Contrat n° 3 : le montant mensuel de la location est de 3 000 € pour janvier 2012 et il augmente de $\beta = 2\%$ les 1^{er} janvier et 1^{er} juillet de chaque année et ce dès le 1^{er} juillet 2012.

La société de location précise d'autre part à l'entreprise que la location de l'engin est valable pour des années complètes d'utilisation et que le montant total dû pour l'année est payable en début d'année.

Soit n le nombre d'années de location.

On désigne par u_n , v_n et w_n respectivement le montant annuel de la location (en euros) pour les contrats n° 1, n° 2 et n° 3.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

- A. $u_n = u_1(1 + \alpha)^{n-1}$
 - B. $w_n = w_1(1 + \beta)^{2n-2}$
 - C. $v_n = a + (n - 1)b$
 - D. Le montant annuel de la location avec le contrat n° 1 atteint le montant annuel de la location avec le contrat n° 3 pour $n = \frac{\ln w_1 - \ln u_1}{\ln(1 + \alpha) - 2\ln(1 + \beta)}$.
3. Trois équipes de football d'écoles de commerce ont disputé un mini championnat entre-elles. Chaque équipe a joué une seule fois contre chaque adversaire. Vous trouverez ci-joint des informations incomplètes :

Equipe	Nombre de parties jouées	Nombre de parties gagnées	Nombre de parties perdues	Nombre de parties nulles	Nombre de buts marqués	Nombre de buts encaissés
X	2	?	1	?	3	2
Y	?	?	1	1	0	?
Z	?	?	?	?	?	1

À partir de ces informations, on peut conclure que :

- A. L'équipe X a gagné une seule fois.
 B. Le match entre les équipes Y et Z s'est terminé par un match nul.
 C. L'équipe X a marqué plus de buts que les 2 autres équipes.
 D. L'équipe X a battu l'équipe Y, 2 buts à 1.
4. Ce matin, je suis parti avec $x \text{ €}$ en poche et sur mon chemin j'ai rencontré trois personnes nécessiteuses.
 J'ai donné au premier 1 € de plus que la moitié de ce que j'avais en poche. Au second, j'ai remis 2 € de plus que la moitié de ce qui me restait alors. Le troisième a reçu 3 € de plus que la moitié de ce qui me restait à ce moment là. Il me reste 1 € .
 À partir de ces informations, on peut conclure que :
- A. J'ai donné au premier $\frac{x+1}{2} \text{ €}$.
 B. Après avoir donné de l'argent au second, il me restait $\frac{x+10}{4} \text{ €}$.
 C. J'ai donné au troisième $\frac{x+14}{8} \text{ €}$.
 D. J'ai distribué 42 € .
5. Dans un groupe composé de x étudiants, on a relevé la couleur des yeux (brun, noir et bleu) et la couleur des cheveux (blond et noir) et les résultats sont les suivants :
- 20 étudiants ont les yeux bleus et les cheveux blonds ;
 - 60 ont les yeux noirs et les cheveux noirs ;
 - 42 ont les cheveux blonds ;
 - 50 ont les yeux bruns ;
 - 72 ont les yeux noirs.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

- A. Le pourcentage de ceux qui ont les yeux bruns et les cheveux noirs est de $\frac{40}{x} \%$.
 B. $(x - 120)$ étudiants ont les yeux bleus.
 C. Le groupe est composé d'au moins 152 étudiants.
 D. Il y a plus d'étudiants avec des cheveux noirs que des cheveux blonds.
6. Dans une entreprise de 3 000 personnes, le salaire moyen est de 2 000 €. Le salaire moyen des hommes est de 3 000 €, celui des femmes est de 1 500 €. Les 10 % de femmes les moins bien payées ont un salaire moyen de 1 000 €.
 À partir de ces informations, on peut conclure que :
- A. Il y a un tiers d'hommes dans l'entreprise.
 B. C'est un homme qui gagne le plus.
 C. Si on retire le plus gros salaire gagné par un homme (10 000 €), le salaire moyen des hommes devient inférieur à 2 990 €.
 D. Les 10 % de femmes les moins bien payées gagnent moins de 3 % de la masse salariale totale.

Exercices n° 7 à 12 : Raisonnement mathématique

7. La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a + bxe^{-x}$ où a et b sont deux nombres réels.
La courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0; 1)$.
En ce point, la tangente à la courbe a comme pente 1.
- A. $f'(x) = b(1+x)e^{-x}$.
B. $a = b = 1$.
C. f admet un maximum qui vaut $1 + e$.
D. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α , avec $-1 < \alpha < 1$.
8. On considère la fonction : $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{x}$. Soit (C) la courbe représentative de f .
- A. La droite $y = 0$ est une asymptote à (C) .
B. La droite $x = 0$ est une asymptote à (C) .
C. Sur $]0; e^{\frac{1}{2}}[$ la fonction f est décroissante.
D. Les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses sont $(e^{\frac{1}{2}}; 0)$.
9. Soit la courbe D d'équation $y = mx + 5$, $m \in \mathbb{R}$ et la courbe P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a < 0$. Un point d'intersection des 2 courbes P et D est le point A d'abscisse $\frac{5}{2}$. La courbe P a pour maximum le point B de coordonnées $(2; 7)$.
- A. On a deux équations $4a + b = 0$ et $4a + 2b + c = \frac{5}{2}$.
B. On a une troisième équation $\frac{5}{2}m + 5 - \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b - c = 0$.
C. De l'énoncé, on conclut que $\begin{cases} a = -8 + 10m \\ b = 32 - 40m \\ c = -25 + 40m \end{cases}$
D. Si $m = -2$, les courbes P et D se coupent au point A et à un autre point d'abscisse $\frac{11}{7}$.
10. Dans un plan orthonormé, on trace un carré A dont les sommets ont les coordonnées $(2; 2)$, $(2; -2)$, $(-2; -2)$ et $(-2; 2)$. On trace également un cercle B de centre $(0; 0)$ et de rayon 2. On trace un second carré C dont les sommets sont les points d'intersection du cercle avec les 2 droites $x = 0$ et $y = 0$.
On considère un point p de coordonnées $(x; y)$.
- A. Le point p est à l'intérieur du carré A si $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 2$.
B. Le point p est à l'intérieur du cercle B si $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$.
C. Le point p est à l'intérieur du carré C si $|y| \leq |x| + 2$.
D. Sachant que le point p est à l'intérieur du carré A, la probabilité que p soit à l'intérieur du cercle B sans être à l'intérieur du carré C est de $\frac{\pi-2}{4}$.
11. Si $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n \leq \frac{1}{2}$ alors :
- A. $n \leq \ln\left(\frac{0,5}{1 - \frac{1}{100}}\right)$.
B. $n \geq -\frac{\ln 2}{\ln(99) - \ln(100)}$.
C. $n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,99)}$.
D. $n \leq \ln(0,5 - 100)$.

12. Soit la fonction définie sur $] - 2 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x + \frac{1}{x+2}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère.
- A. La courbe (C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5.
- B. $\int_0^2 f(x) dx = 6 + \ln 2$.
- C. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote verticale à (C).
- D. La fonction g définie par $g(x) = \ln[f(x)]$ est croissante sur $] - 2 ; +\infty[$.

Exercices n° 13 à 18 : Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

13. Une société souhaite conquérir de nouveaux marchés. Pour élargir sa gamme de produits, elle décide de racheter une unité de production qui peut fabriquer deux types d'articles (X et Y) et dont l'organisation actuelle est présentée ci-dessous :

	Article X	Article Y
Quantités produites et vendues	2 000	1 000
Prix de vente unitaire en euros	30	20
Charges variables de production unitaires en euros	12	10
Charges variables de distribution unitaires	10 % du prix de vente	
Charges fixes totales	20 000 €	

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

- A. Le chiffre d'affaire total est égal à 80 000 €.
- B. Les charges variables de distribution de Y s'élèvent à 2 000 €.
- C. Le résultat global est égal à 18 000 €.
- D. Pour que le résultat soit au moins égal à 22 800 €, il faudrait que les charges variables de distribution unitaires soit au plus égal à 5 % du prix de vente.
14. Cette unité de production fabrique ces deux articles à partir d'une seule machine dont les temps d'utilisation en minutes sont de 1,2 pour X et 2,4 pour Y. La capacité de l'atelier de production est de 100 heures machine.
- En raison de la concurrence de plus en plus sensible, la société met au point un système de prix dégressif consenti aux clients. Le prix de vente de chaque article diminue désormais en fonction de la quantité vendue sur le modèle suivant :

	Article X	Article Y
Quantités vendues	x	y
Prix de vente unitaire	$30\left(1 - \frac{x}{6000}\right)$	$20\left(1 - \frac{y}{4000}\right)$

À partir des informations précédentes, on peut conclure que lorsque la capacité de l'atelier est entièrement utilisée :

- A. $x = 5000 - 2y$.
- B. Le chiffre d'affaires total est égal à : $25000 + 60y - 0,025y^2$.
- C. Le chiffre d'affaires est maximum lorsque $y = 1000$.
- D. Le chiffre d'affaires est minimum lorsque $x = 2600$.

15. Le responsable des ventes de cette entreprise organise une formation aux articles X et Y destinés aux nouveaux commerciaux. Les opérations ou tâches à mener sont répertoriées dans le tableau suivant :

Nom tâche	Nature	Durée en jours	Tâches précédentes*
T1	Choisir le formateur	3	T3
T2	Définir avec lui le plan de formation	2	T1
T3	Choisir les dates et lieux	1	Aucune
T4	Sélectionner les formés	2	Aucune
T5	Rédiger et transmettre la convocation	4	T2, T3 et T4
T6	Informers les chefs de vente	5	T3 et T4
T7	Réaliser la formation	5	T5 et T6

* Tâches qui doivent être préalablement achevées

Pour pouvoir superviser l'ensemble des opérations, on représente un calendrier où n'apparaissent que la numérotation des jours, le début et la fin de chacune des tâches évoquées ci-dessus, sachant que l'entreprise souhaite que la formation soit réalisée dans les plus courts délais.

Une tâche débute toujours en début de journée et se termine toujours en fin de journée.

Exemple :			
Numéro jour \Rightarrow	1	2	3
	Tâche M		
	4	5	
	Tâche N		
		6	7
		Tâche O	
		Tâche P	
Lecture du « calendrier » de l'exemple : la tâche M dure 3 jours. La tâche N dure 2 jours et ne peut commencer avant la tâche M.			
La tâche O dure 3 jours et ne peut commencer avant la tâche N. La tâche P dure 4 jours et ne peut commencer avant la tâche M.			

Dans toute la suite : tout changement éventuel dans la durée d'une tâche quelconque doit être pris en compte indépendamment des autres changements.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

- A. Le retard maximum que la tâche T6 peut enregistrer sans retarder l'ensemble des opérations, ne doit pas excéder trois jours.
- B. Le retard maximum que la tâche T2 peut enregistrer sans que la durée totale des opérations soit modifiée, ne doit pas excéder un jour.
- C. Si aucun retard n'est pris dans aucune tâche, l'ensemble des opérations demandera exactement 15 jours.
- D. Si un retard de 6 jours se produit pour la tâche T6, l'ensemble des opérations demandera exactement 21 jours.
16. Afin de moderniser sa gamme de produits, cette entreprise a mis au point un nouvel article noté Z. Elle réalise une étude de marché sur 200 personnes répartis dans trois régions différentes. Les résultats de cette enquête sont donnés dans le tableau ci-dessous (où α désigne un réel positif) et ont montré que 30 % de ces personnes interrogées ont acheté l'article Z.

Région	Proportion de personnes interrogées	Fréquence d'achat du produit Z
1	0,2	0,35
2	0,5	0,40
3	0,3	α

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

- A. $\alpha = 0,25$.
 - B. La proportion d'acheteurs du nouvel article Z provenant de la région 2 est égale à 0,40.
 - C. Le nombre d'acheteurs de la région 1 est égal au double de celui de la région 3.
 - D. La proportion de personnes provenant de la région 1 et ayant acheté le produit Z est égale à 0,07.
17. L'article Z se présente sous la forme d'un cône de hauteur h mètres et dont la base est un disque de rayon r mètres. La formule donnant son volume est $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

La société s'intéresse à deux formules d'emballage de cet article :

- la première notée E_1 est formée par un cylindre en carton dont la base est un disque de rayon r mètres et dont la hauteur est h ;
- la seconde notée E_2 est formée par un parallélépipède en carton dont la base est un carré de côté égal à $2r$ mètres et dont la hauteur est h .

Pour les deux formules, le volume disponible entre l'emballage et l'article Z est meublé par de la mousse.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

- A. La surface en carton en m^2 de l'emballage E_1 est égale à $2\pi r^2 h$.
 - B. La surface en carton en m^2 de l'emballage E_2 est égale à $4r(2r + h)$.
 - C. Le volume en m^3 occupé par la mousse de l'emballage E_1 est égal à $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
 - D. Le volume en m^3 occupé par la mousse de l'emballage E_2 est égal à $r^2 h \left(4 - \frac{\pi}{3}\right)$.
18. Le coût d'un m^2 de carton est noté c_c et le coût d'un m^3 de mousse est noté c_m . À ces coûts s'ajoutent les frais fixes pour la fabrication d'un emballage E_1 (notés f_1) et les frais fixes pour la fabrication d'un emballage E_2 (notés f_2). Tous ces prix sont donnés en euros. On appelle p_1 (respectivement p_2) le prix de revient en euros d'un emballage E_1 (respectivement E_2).

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

- A. $p_1 = 2\pi r \left[(r + h)c_c + \frac{r h}{3} c_m \right] + f_1$.
- B. Si $f_1 = f_2$ alors $p_1 < p_2$.
- C. Si la hauteur du cône est divisé par 2 alors le coût du carton et le coût de la mousse sont réduits de moitié pour l'emballage E_2 .
- D. Le coût du carton de l'emballage E_2 est au moins 10 % plus cher que celui de l'emballage E_1 .