# Examen d'admission École polytechnique

## Faculté de Sciences Appliquées Université libre de Bruxelles

**1.** Résoudre dans IR l'équation

$$2^{4x+3}+3\left(4^x\right)-2^{-1}=0.$$

---

**2.** **a.** Déterminer les valeurs réelles des paramètres $a,\ b,\ c$ pour que le polynôme $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+ax+c$ soit divisible par $1-x^2$.

**b.** Pour les valeurs des paramètres trouvées ci-dessus :

i. déterminer le quotient de la division du polynôme $P$ par $1-x$ ;

ii. factoriser $P$ au maximum dans $\mathbb{R}$

iii. factoriser $P$ au maximum dans $\mathbb{C}$ ; en déduire les racines complexes de ce polynôme et les représenter dans le plan de Gauss.

---

**3.** Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\sqrt{|x|}\mathrm{e}^{-x^2}$$

et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y=f(x)$ ($\mathscr{C}$ est le graphe de $f$).

**a.** La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ? Justifier (utiliser la définition de la dérivée).

**b.** Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

**c.** Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

**d.** Établir le tableau des variations de $f,\ f'$ et $f''$ contenant

- les racines de $f,\ f'$ et $f''$ ;
- les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ ;
- les extremums de $f$, les domaines de croissance et de décroissance de $f$ ;
- les points d'inflexion de $f$ et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de $f$

**e.** Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}$ d'après les résultats du d.

---

**4.** Soient $f$ et $g$ les fonctions de $R$ dans $R$ définies par

$$f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x},\qquad g(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,\quad J=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

**a.** Calculer $f(x)+g(x)$, en déduire $I+J$ (sans calculer $I$ ni $J$).

**b.** Calculer $J$ et en déduire $I$.

**c.** Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+\ :\ f(x)\leqslant g(x)$.

**d.** Calculer l'aire du domaine $D=\{(x\ ;\ y)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant x\leqslant 1,\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$.

---

**5.** **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\int_0^n [x]\,\mathrm{d}x$$
où $[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.

**b.** Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Calculer
$$\int_0^t [x]\,\mathrm{d}x$$
**Indication :** $[t] \leqslant t < [t]+1$.

**6.** **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 0.$$

**b.** Résoudre l'équation $\cos 4z = 0$.

**c.** Déduire de a. et b. la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\cos\dfrac{3\pi}{8}$.

**7.** **Partie I**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes $X$ et $Y$, on donne les points A(2 ; 0) et B(0 ; 1). Une droite mobile de coefficient angulaire $k$ coupe l'axe $X$ au point $P$ et l'axe $Y$ au point $Q$.

**a.** déterminer une équation cartésienne du lieu géométrique du point $M$ d'intersection des droites A$Q$ et B$P$ ;

**b.** discuter la nature de ce lieu géométrique en fonction de $k$ ;

**c.** construire ce lieu pour $k = -2$ (faire une figure en prenant comme unité 2 cm) ;

**d.** construire ce lieu pour $k = 2$ (faire une figure en prenant comme unité 2 cm).

**Partie II** Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes $X$, $Y$ et $Z$, on donne le point P(0 ; 3 ; 4).

**a.** établir des équations cartésiennes de la droite $d$ parallèle à O$X$, passant par $P$ ;

**b.** établir une équation cartésienne du plan contenant $d$ et l'axe O$X$ ;

**c.** déterminer les coordonnées des sommets Q et R du carré OPQR, sachant que Q est sur $d$ et que son abscisse est positive ;

**d.** établir des équations paramétriques de la perpendiculaire $p$ au plan du carré passant par le centre de celui-ci ;

**e.** déterminer les coordonnées des points S et S′, sommets des pyramides droites dont le carré est la base et dont les hauteurs mesurent cinq unités de longueur ;

**f.** déterminer le cosinus de l'angle aigu des arêtes SO et SP, une équation cartésienne du plan OPS, la longueur de l'arête OS ainsi que le volume du polyèdre de sommets OPQRSS′.

**Partie III**

**a.** Déterminer le barycentre de deux points distincts A et B de masses respectives 2 et −1.

**b.** Déterminer le barycentre G de trois points non alignés, A, B, C, affectés de masses égales et le barycentre G′ de ces mêmes points affectés de masses respectives 1, 1 et −1.

**c.** Soit $M$ un point quelconque du plan ABC.
Exprimer, en tenant compte des résultats du 2. les sommes vectorielles suivantes : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

**d.** Déterminer le lieu des points $M$ tels que les sommes vectorielles considérées au 3. soient des vecteurs orthogonaux.