Baccalauréat groupe 1 bis (groupes I-IV) juin 1996

EXERCICE 1 **4 points**

Un club sportif compte 80 inscrits en natation, 95 en athlétisme et 125 en gymnastique. Chaque inscrit pratique un seul sport.
N. B. - Si E est un évènement, on notera $P(\text{E})$ sa probabilité et E l'évènement contrair. Si E et F sont deux évènements, $P(\text{E}_{|\text{F}})$ est la probabilité de « E sachant que F est réalisé ».

1. On demande à trois inscrits choisis au hasard de remplir un questionnaire.
   Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a. A : « les sportifs choisis pratiquent tous l'athlétisme » ;
   b. B : « les sportifs choisis pratiquent tous le même sport ».
2. Parmi les inscrits en natation, 45 % sont des filles. De même 20 % des inscrits en atlùétisme et 68 % des inscrits en gymnastique sont des filles.
   a. On choisit un inscrit au hasard. Quelle est la probabilité p_1 que l'inscrit choisi soit une fille pratiquant l'athlétisme ? Quelle est la probabilité p_2 que ce soit une fille ?
   b. Si on choisit au hasard une fille, quelle est la probabilité p_3 qu'elle pratique l'athlétisme ?

EXERCICE 2 ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE **5 points**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique : 4 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$$a = 1 - \text{i}, \quad b = 1 + \text{i}, \quad c = -1 + \text{i} = -a.$$

On note Γ le cercle de diamètre [AB].

1. a. Placer sur une figure les points A, B, C et Γ.
   b. Mettre les nombres complexes a, b et c sous forme trigonométrique.
   c. Soit r la rotation de centre O telle que $r(\text{A}) = \text{B}$.
   Déterminer l'angle de r et le point $r(\text{B})$, image de B par r.
   d. Déterminer l'image Γ' du cercle Γ par r ; placer Γ' sur la figure.
2. On considère $\theta \in]0\ ;\ 2\pi[$ distinct de π ; on note M le point d'affixe $z = 1 + \text{i}e^{\text{i}\theta}$.
   On désigne par M' l'image de M par r, et on appelle z' l'affixe de M'.
   a. Montrer que M est un point de Γ distinct de A et de B.
   b. Exprimer z' en fonction de z.
   Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{\text{B}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}M'}$.
   c. Établir la relation $u = u' \tan \dfrac{\theta}{2}$.
   d. Prouver que les points B, M et M' sont alignés. Placer sur la même figure un point M et son transformé M'

EXERCICE 2 ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **5 points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que AB = AC et $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AC}}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle et rectangle avec $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{CA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{CI}}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Pour la figure, que l'on complétera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_{A} la rotation de centre A qui transforme B en C et r_{C} la rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   On pose $f = r_{\text{C}} \circ r_{\text{A}}$.
   a. Déterminer les images par f de A et de B.
   b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?
2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B.
   On appelle C′ l'image de C par s, H le milieu du segment [BC] et H′ son image par s.
   a. Déterminer un mesure de l'angle de s.
   Montrer que C′ appartient à la droite (OA).
   b. Donner l'image par s du segment [OA] et montrer que H′ est le milieu de [OB].
   c. Montrer que (C′H′) est perpendiculaire à (OB).
   En déduire que C′ est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

PROBLÈME **11 points**

L'objet de ce problème est :
- d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x - 1}{\text{e}^x - x};$$

- de justifier rigoureusement le tracé de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, unité graphique 3 cm.
- de détailler enfin certaines propriétés d'une suite de nombres réels construite à partir de f.

Partie A. Questions préliminaires

1. Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \text{e}^x - x - 1.$$

   a. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g'(x) > 0$. En déduire le sens de variation de g sur $[0~;~+\infty[$.
   b. Calculer $g(0)$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) > 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = (2 - x)\text{e}^x - 1.$$

   a. Étudier la fonction h et dresser son tableau de variations.
   b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, α, et que $\alpha > 1$.
   c. Vérifier la double inégalité $1,84 < \alpha < 1,83$.
   d. Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x \geqslant 0$, le signe de $h(x)$.

Partie B Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathscr{C}$

1. **a.** Justifier que f est bien définie en tout point de $x \in [0~;~+\infty[$.

b. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on peut écrire,

$$f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$; interpréter géométriquement, relativement à $\mathscr{C}$, le résultat obtenu.

c. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$.

d. Étudier la fonction f et dresser sonn tableau de variations.

2. **a.** Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

b. En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $x \geqslant 0$, la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

3. **a.** Préciser la tangente au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.

b. Tracer $\mathscr{C}$, en faisant figurer sur le dessin la droite Δ d'équation $y = 1$ et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

Partie C - Étude de la suite $\boldsymbol{u_n = \displaystyle\int_0^n [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x}$

1. Déterminer une primitive de la fonction f. En déduire l'expression de u_n, en fonction de n.

2. Interpréter géométriquement le nombre réel $-u_1$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$ (on pourra utiliser l'égalité $n = \ln(\mathrm{e}^n)$.

4. Interpréter géométriquement le nombre réel $u_n - u_1$, puis le résultat obtenu dans la question précédente.