∽ Aix–Marseille Baccalauréat mathématiques 1957 ∾

I. 1er sujet
Calcul de $\sin(a+b)$, ou, si l'on préfère, de $\cos(a+b)$, connaissant les lignes trigonométriques des arcs a et b.

I. 2e sujet
Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque l'arc x, supposé évalué en radians, tend vers zéro.

I. 3e sujet
Établir les formules donnant sous forme d'un produit de facteurs les expressions de $\sin p + \sin q$ et de $\cos p + \cos q$.

II.

1. O et O′ étant deux points fixes d'un plan, tels que $\text{OO}' = 2a$, quel est le lieu géométrique des points M du plan, tels que la somme des aires des deux cercles de centres O et O′ et de rayons respectifs OM et O′M soit constante et égale à k^2.

   À quelle condition le lieu existe-t-il ?
2. O et O′ étant deux points de l'espace distants de $2a$, on considère deux sphères variables, S et S', de centres O et O′ et de rayons respectifs R et R′.

   On suppose que les rayons R et R′ varient de façon que la somme des aires des deux sphères S et S' conserve une valeur constante donnée k^2.

   Quel est, lorsqu'il existe, le lieu géométrique du cercle commun aux deux sphères ?

   Pour quelles valeurs de k^2 le lieu existe-t-il ?
3. Montrer que, lorsque $k^2 = 16\pi a^2$, le lieu géométrique du **2.** est la sphère Σ de diamètre OO' et que les plans tangents à deux sphères S et S' en l'un quelconque de leurs points communs sont perpendiculaires.
4. k^2 ayant la valeur donnée au **3.** et M étant un point quelconque de la sphère Σ, montrer que le plan tangent en M à Σ coupe les deux sphères S et S' qui passent par M suivant deux cercles égaux C et C′.

   Pour quelles positions du point M sur Σ le rayon des deux cercles C et C′ est-il maximum ?

   Montrer que toutes les sphères ayant pour diamètre les segments déterminés par les centres de deux quelconques des cercles C et C′ précédemment définis sont tangentes à une droite fixe.