Baccalauréat ES Aix-Marseille [1] juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient 3 boules vertes portant le numéro 0, deux boules rouges portant le numéro 5 et une boule noire portant le numéro a (a est un entier naturel non nul, différent de 5 et de 10).
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne :

1. Quelle est la probabilité pour qu'il tire :
   a. trois boules de la même couleur ;
   b. trois boules de couleurs différentes ;
   c. deux boules et deux seulement de la même couleur.
2. Le joueur reçoit, en francs, la somme des numéros marqués sur les boules tirées. Les gains possibles du joueur sont donc :

$$0 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad a \quad ; \quad 5+a \quad ; \quad 10+a.$$

   a. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a.
   c. Calculer a pour que l'espérance de gain du joueur soit de 20 francs.

EXERCICE 2 SÉRIE B **4 points**

Le tableau suivant donne le montant (en millions de dollars) des droits de retransmission télévisée des jeux olympiques d'été de 1972 à 1992.

Ville – Année	Rang de l'année x_i	Montant y_i
Munich – 1972	1	15,2
Montréal – 1976	2	29,5
Moscou – 1980	3	92,6
Los Angeles – 1984	4	288,0
Séoul – 1988	5	402,0
Barcelone – 1992	6	634,5

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra 2 cm pour 1 rang sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 millions de dollars sur l'axe des ordonnées.
2. On pose $z_i = \ln y_i$.
   Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés.
   Les valeurs des z_i les coefficients a et b de la droite de régression seront arrondis au centième le plus proche.
3. Déduire de la question précédente une relation approchée entre y et x de la forme $y = \alpha.\beta^x$.
   Les coefficients α et β seront arrondis au centième le plus proche.
4. À l'aide de la question 3, donner une prévision du montant des droits de retransmission télévisée pour les jeux olympiques d'Atlanta en 1996.

1. Corse-Montpellier-Nice-Toulouse

PROBLÈME **12 points**

Soit la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

et C sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm).

1. a. Soit f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le signe de $\ln x$.

Étudier le sens de variation de f et en déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

c. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

(Pour le calcul de $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f$ on pourra écrire $f(x)$ sous la forme

$f(x) = 1 - \dfrac{1 + \ln x}{x}$.)

2. a. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

b. Résoudre l'inéquation $f(x) > 1$. En déduire la position de C par rapport à la droite Δ d'équation $y = 1$.

3. Soit A le point d'intersection de C et de Δ. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point A.

4. Construire, dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, Δ, T puis C.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ a une solution unique α appartenant à l'intervalle $]0~;~1]$.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

6. a. Déterminer la fonction dérivée de u définie par :

$$u(x) = 1 + \ln x.$$

En déduire une primitive de g définie par

$$g(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x).$$

b. Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\text{e}} \frac{1 + \ln x}{x}\,\text{d}x$.

c. Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.