Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat Aix-Marseille [1] juin 1965 ∾ Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

On donne un triangle ABC, dont le centre de gravité est G; soit M un point de son plan.

1. Exprimer

$$f(M) = \overrightarrow{M\text{B}} \cdot \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{C}} \cdot \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{A}} \cdot \overrightarrow{M\text{B}}.$$

au moyen des seules longueurs MG, BC, CA, AB.

2. Quel est l'ensemble E des points M tels que $f(M) = 0$?
Quels points de E appartiennent au cercle de diamètre BC ?

EXERCICE 2

Soit un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$; p et q étant deux nombres réels, on désigne par M le point de coordonnées $(p~;~q)$ et on considère l'équation en z

$$(1) \qquad z^2 - 2pz + q = 0,$$

dont les racines peuvent être réelles ou complexes.
Ainsi, à tout point M est associée une équation (1), et réciproquement.

1. Déterminer et représenter sur une même figure les ensembles A, B, C des points M tels que (1) possède
   a. des racines complexes ;
   b. des racines réelles et distinctes ;
   c. une racine double.
   Calculer les racines dans chacun de ces trois cas.
2. Former l'équation de la tangente à C en son point d'abscisse c ; montrer que, si $M(p~;~q)$ appartient à B, l'équation (1) donne les abscisses des points de C où la tangente passe en M.

   Dans les deux questions suivantes, k désigne un nombre réel positif donné ; pour répondre à ces questions, on pourra examiner successivement les cas où M appartient à A ou à B.

3. Déterminer l'ensemble E_k des points M tels que le module de la différence entre les racines de l'équation (1) associée à M soit inférieur à $2k$.
   Représenter sur une figure les ensembles A, B, C, E_k et hachurer ce dernier.
4. Déterminer l'ensemble F_k des points M tels que les modules des racines de l'équation (1) associée à M soient, *tous deux*, inférieurs à k.
   Représenter sur une figure les ensembles A, B, C, F_k eL hachurer ce dernier.
5. On donne un nombre positif k ; quel est le plus grand nombre, k', tel que l'ensemble $F_{k'}$ soit inclus dans l'ensemble E_k ?
   Est-il possible de répondre en tout ou en partie à cette question sans utiliser les résultats des deux questions précédentes ?

1. Bordeaux-Clermont–Montpellier–Nantes–Poitiers–Rennes–Toulouse

6. On suppose que M appartient à B et l'on désigne par Γ_M le cercle qui a son centre sur la droite $x'Ox$ et qui coupe cette droite aux points dont les abscisse sont les racines de l'équation (1) associée à M.

Écrire l'équation du cercle Γ_M.

Montrer qu'un sous-ensemble de cercles Γ_M est un faisceau linéaire si, et seulement si, les points M correspondants appartiennent à une même droite, Δ, non parallèle à Oy, qu'on déterminera par une équation de la forme

$y = mx + h$.

Montrer que la nature du faisceau est liée au nombre des points communs à Δ et à C ; peut-on caractériser géométriquement, lorsqu'ils existent, les points de Poncelet du faisceau ?