∽ Aix-Marseille septembre 1967 ∾
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

I. - Variations et représentation graphique de la fonction f définie par

$$f(x) = 3\sin x - 2\sin^2 x \quad (-\pi \leqslant x \leqslant +\pi).$$

Déterminer A et B pour que

$$F(x) = A\cos x + B\cos^3 x$$

(A et B étant des nombres constants) soit une primitive de la fonction f ci-dessus.
En déduire l'aire de la partie du plan définie par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

II. - Soit n un entier strictement positif.
Démontrer que $3^n - 2n - 1$ est divisible par 4.

III.

1. On donne un cercle fixe, (C), de centre O et de rayon R, et un point fixe, A, distinct de O.
   Soit M un point variable, (Ω) le cercle de diamètre MA et E le point où ce cercle (Ω) recoupe OA. Trouver l'ensemble (Δ) des points M tels que (Ω) coupe le cercle (C) en deux points diamétralement opposés sur (C).
   Que peut-on dire de (Δ) et de la polaire de A par rapport à (C) ?
   Étudier la position de (Δ) par rapport à (C), suivant la position de A par rapport à (C).
2. On choisit, dans le plan du cercle (C), un repère orthonormé $x\text{O}y$ dont l'origine est le centre, O, de (C).
   Soit x_0 et y_0 les coordonnées de A, x et y celles du point M.
   Montrer que, pour que le cercle de diamètre AM coupe (C) en deux points diamétralement opposés sur (C), il faut et il suffit que

   $$\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OM}} + \text{R}^2 = 0.$$

   En déduire l'équation cartésienne de l'ensemble (Δ) trouvé à la question **1.**
   À un point A correspond l'ensemble (Δ) ; à un autre point A′, l'ensemble (Δ′).
   Quel est l'ensemble correspondant au point il commun à (Δ) et à (Δ′) (si ce point B existe) ?
3. On suppose, dans toute cette question, que le coordonnées de A dépendent d'un paramètre, α ; soit $x_0 = \text{R}\sin\alpha + \text{R}$ et $y_0 = \text{R}\cos\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$.
   a. Déterminer le nombre de valeurs de α et, par conséquent, le nombre de points A, pour lesquels l'ensemble correspondant (Δ) passe par un point donné, P, de coordonnées x et y.
   Discuter suivant la position de P dans le plan.
   b. Trouver l'ensemble, (γ), des points A quand α varie.
   Transformer (γ) par l'inversion de pôle O et de puissance $-\text{R}^2$.
   En déduire la construction de ensembles (Δ) passant par un point donné, P, et celle des points A correspondants (on ne demande pas de discussion).