Durée : 4 heures

Baccalauréat C Aix-Marseille[1] septembre 1965

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Par rapport à un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz), où l'unité de longueur est 1 cm, on donne les points

$$\text{A}(+3\,;\ +3\,;\ +3),\quad \text{I}(+3\,;\ 0\,;\ +6),\quad \text{J}(+6\,;\ +3\,;\ +9).$$

Représenter ces points sur une épure, les plans de projection étant le plan $x\text{O}y$ horizontal et le plan $y\text{O}z$ frontal.
Représenter le carré ABCD dont un sommet est A et dont la diagonale BD est portée par la droite IJ .
N. B. - On expliquera la méthode géométrique suivie et son adaptation à l'épure.

EXERCICE 2

On considère la suite des nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$.
On donne les deux premiers, u_0 et u_1 réels ; les suivants sont définis par la relation de récurrenre

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2},\quad n \geqslant 2.$$

1. Construire cette suite de nombres ; établir qu'elle est périodique ; de combien de nombres se compose la période ?
2. Démontrer que u_n peut se mettre sous la forme

   $$u_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta,$$

   où θ ne dépend pas de u_0, u_1 et n et où λet μ dépendent de u_0 et u_1 et non de n.
   Calculer θ $(0 < \theta < \pi)$, λ et μ.
3. $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ étant les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé (Ox, Oy), on considère les vecteurs

   $$\overrightarrow{\text{O}P_n} = \overrightarrow{\imath}\,\lambda \cos n\theta + \overrightarrow{\jmath}\,\mu \sin n\theta,$$

   λ, μ et θ ayant les valeurs ci-dessus.
   Montrer que les points P_n sont sur une même conique, L, dont on précisera les éléments.
   Montrer que les droites P_kP_{k+1} sont tangentes à une même conique, L', homothétique et concentrique à L.
4. Démontrer que toute expression

   $$v_n = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi,$$

   où $A, B, \varphi (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ sont trois réels donnés quelconques, indépendants de n, peut être considérée comme le terme de rang $n+1$ d'une suite $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ satisfaisant à la relation de récurrence

1. Bordeaux, Clermont, Montpellier, Nantes, Poitiers, Toulouse

$$vu_n = av_{n-1} + bv_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

a et b étant deux constantes, qu'on calculera en fonction de φ.

Pour quelles valeurs de φ cette suite est-elle périodique, sa période comportant p termes ?