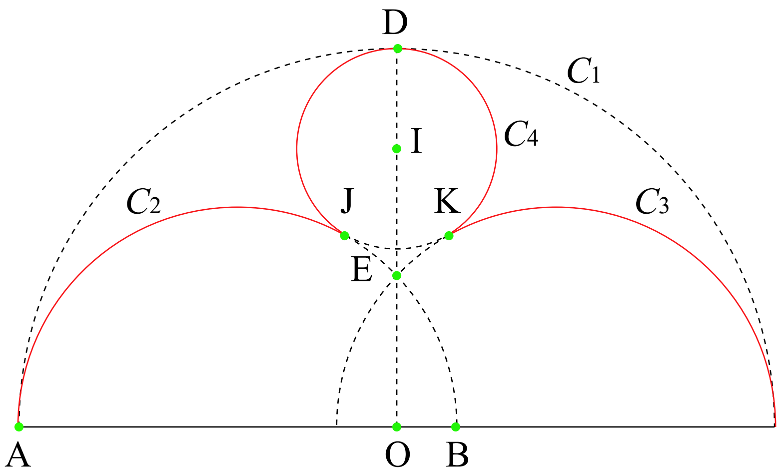
Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Pour les besoins de son nouveau spectacle, le célèbre chanteur Johny Rockstar souhaite créer une scène de spectacle moderne.
Cette scène est représentée vue de dessus par le schéma suivant :



Le demi-cercle C_1 de centre O passant par le point A et le demi-cercle C_2 de diamètre [AB] sont tangents en A.
La droite (OD) est axe de symétrie de la figure et le point D appartient à C_1.
Le demi-cercle C_3 est le symétrique de C_2 par rapport à (OD).
Le point E est le point d'intersection du segment [OD] et de C_2.
Des contraintes de construction imposent que $OA = 10$ m et $DE = 6$ m.

1 - Calculer le rayon de C_2.
2 - C_4 est le cercle de centre I passant par le point D ;
C_4 est tangent à C_1 en D, tangent à C_2 en J, et tangent à C_3 en K.
Calculer le rayon de C_4.

Propriété admise : Si deux cercles de centre Ω et Ω' sont tangents en un point M, alors Ω, Ω' et M sont alignés.

Eléments de solution

1. E $\in$ [OD], donc $OE = OD - ED = 10 - 6 = 4$.
Dans le triangle AOE rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$AE^2 = AO^2 + OE^2$
$AE^2 = 10^2 + 4^2 = 116$. On en déduit : $AE = \sqrt{116}$

Le point E appartient à $\mathcal{C}_2$, donc le triangle ABE est rectangle en E.

Les triangles AOE et ABE sont deux triangles rectangles qui ont un angle aigu en commun. Ils sont semblables.

Dès lors $\dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AE}{AB}$. Il vient $AB = \dfrac{AE^2}{AO} = 11,6$.

Le rayon de $\mathcal{C}_2$ a donc pour mesure 5,8 m.

2. Soit Ω le centre du cercle $\mathcal{C}_2$ et r le rayon de $\mathcal{C}_3$. $\Omega I = 5,8 + r$.
D'autre part, I $\in$ [OD], donc $OI = OD - ID = 10 - r$, et $\Omega \in$ [AO], donc $\Omega O = AO - A\Omega = 10 - 5,8 = 4,2$.

Dans le triangle ΩOI rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $\Omega I^2 = \Omega O^2 + OI^2$, $(5,8 + r)^2 = 4,2^2 + (10 - r)^2$.

En développant, il vient : 31,6 $r = 84$, c'est-à-dire $r = \dfrac{210}{79}$ m.