Durée : 4 heures

Baccalauréat C Aix en Provence juin 1970

EXERCICE 1

On donne un carré ABCD dans le plan.
Le point M étant un point variable de la diagonale AC (entre A et C), on construit le cercle (α) tangent à AD en A et passant par M, ainsi que le cercle (γ) tangent à CD en C et passant aussi par M. Ces deux cercles ont un point commun, P, autre que M.
Montrer que l'axe radical de (α) et de (γ) passe par un point fixe.
Trouver l'ensemble des points P quand M parcourt la diagonale AC.

EXERCICE 2

Les entiers seront écrits ici dans la base dix.
En remarquant que $999 = 27 \times 37$, montrer que pour tout entier positif n

$$10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}.$$

En déduire le reste de la division par 37 du nombre

$$10^{10} + 10^{20} + 10^{30}.$$

PROBLÈME

Dans tout le problème, m est un paramètre *strictement positif.*

1. Soit φ_m la fonction définie, pour $x > 0$, par la formule

$$\varphi_m(x) = x^2 + m\text{Log}\, x,$$

où Log désigne le logarithme népérien.
Déduire des variations de φ_m que cette fonction s'annule pour une et une seule valeur, α_m qui est comprise entre 0 et 1. (On ne cherchera pas à calculer α_m)

2. Soit f_m la fonction définie, pour $x > 0$, par la formule

$$f_m(x) = 1 - x + \frac{m}{x}(1 + \text{Log}\, x).$$

Étudier les variations de f_m.
Montrer que les courbes $(\mathscr{C}_m)$, représentatives des f_m dans un repère cartésien, admettent les mêmes asymptotes, dont l'une, (D), n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Préciser (D) $\cap\, (\mathscr{C}_m)$ et la position de $(\mathscr{C}_m)$ par rapport à (D).
Construire $(\mathscr{C}_1)$ (On montrera, à cette occasion, que $\frac{1}{\text{e}} < \alpha_1 < 1$.)

3. Montrer que $(\mathscr{C}_m)$ est transformée de $(\mathscr{C}_1)$ par une transformation géométrique très simple, à préciser, A_m.
Discuter le nombre de courbes $(\mathscr{C}_m)$ passant par un point, P du plan, selon la position de P dans le plan.