Baccalauréat C Aix-en-Provence septembre 1970

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction f définie par la formule

$$f(x) = \text{Log}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

sur l'ensemble des réels, x, tels que l'expression du second membre ait un sens (Log désigne le logarithme népérien).
Construire la courbe représentative de f, en repère orthonormé.

EXERCICE 2

Montrer (au moyen des congruences) que, si aucun des trois entiers a, b ou c n'est multiple de 3, $a^2 + b^2 + c^2$ est multiple de 3.

PROBLÈME

1. On donne dans le plan un point, A, et une droite, (D) (ne passant pas par A). Préciser l'ensemble, E, des points M auxquels peut s'appliquer l'opération suivante :

   Si M est sur la parallèle à (D) passant par A, prendre le symétrique M' de M par rapport à A.

   Si M n'est pas sur cette parallèle, mener la droite AM qui coupe (D) en P, puis prendre le conjugué M' de M par rapport aux points A et P.

   On appellera H la transformation ainsi définie sur E par $M' = H(M)$.

2. Soit $2a$ la distance de A à (D). Prendre un repère orthonormé tel que A soit le point $(-a\,;\,0)$ et (D) la droite d'équation $x = a$. Soit (D') la droite $x = -a$.

   Calculer les coordonnées, $\left(x'\,;\,y'\right)$, de H(M), en fonction de celles, $(x\,;\,y)$, de M.

   On vérifiera que les deux cas géométriques peuvent s'exprimer par les mêmes expressions algébriques.
3. Soit A$'$ la projection orthogonale de A sur (D).

   Soit H' la transformation définie avec A$'$ et (D$'$) comme l'est H avec A et (D).

   Vérifier que H' et H sont définies sur le même ensemble E.

   Soit I la transformation identique de E, soit S la symétrie par rapport à AA$'$ définie sur E et soit $G = \{H, H', S, \text{I}\}$.

   Calculer les produits, deux à deux, des éléments de G.

   Quelle conclusion peut-on faire ?

N.B. - Les questions 2 et 3 sont indépendantes, mais la question 3 peut se faire soit géométriquement, soit par le calcul en utilisant les formules à trouver dans la question 2.