

∞ Aix-Marseille juin 1967 ∞  
Baccalauréat mathématiques élémentaires

**EXERCICE 1**

Déterminer le module et l'argument de chaque solution de l'équation

$$z^4 - z^2\sqrt{2} + 1 = 0,$$

où  $z$  appartient au corps des nombres complexes.

**EXERCICE 2**

Étant donné deux cercles,  $(C)$  et  $(C')$ , de rayons  $R$  et  $R'$ , tangents extérieurement en  $A$ , déterminer l'inversion (pôle et puissance) qui transforme le cercle  $(C)$  en une droite  $(d)$  tangente à  $(C')$  et le cercle  $(C')$  en une droite  $(d')$  tangente à  $(C)$ .

En déduire une construction de deux cercles,  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$ , orthogonaux, tangents tous deux aux cercles  $(C)$  et  $(C')$ .

**PROBLÈME**

1. Soit  $m$  un paramètre réel strictement positif.

a. On considère les polynômes

$$P(x) = x^2 + mx - 2 \quad \text{et} \quad Q(x) = mx - 1.$$

Pour quelle valeur de  $m$  le polynôme  $P(x)$  est-il divisible par  $Q(x)$  ?

b. On suppose, dans toute la suite du problème, que  $m$ , qui reste strictement positif, est différent de 1.

Soit  $f$  la fonction définie, pour tout réel  $x$  différent de  $\frac{1}{m}$ , par

$$f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}.$$

On désigne par  $C_m$  la courbe représentative par rapport à un repère orthonormé  $xOy$ , de la fonction  $f$  correspondant à la valeur  $m$  du paramètre.

Pour quelles valeurs de  $m$  la fonction  $f$  admet-elle un maximum (relatif) ?

Construire  $C_2$  et  $C_{\frac{1}{2}}$ .

(On ne demande pas la construction de  $C_m$  dans le cas général).

Montrer que les courbes  $C_m$  passent par trois points fixes.

2. Soit  $y = kx$  l'équation d'une droite  $D_k$  passant par  $O$ . Établir une équation dont les racines sont les abscisses des points d'intersection de  $C_m$  et  $D_k$ .

Comment faut-il choisir  $m$  pour que toutes les droites  $D_k$  coupent  $C_m$  ?

3. On se donne un point  $M$  distinct de  $O$ , de coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  et l'on écrit les équations paramétriques de la droite  $OM_1$  sous la forme

$$x = \frac{x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1}{1 + \lambda}.$$

Donner une signification géométrique du paramètre  $\lambda$ .

Montrer que, pour que le point de paramètre  $\lambda$  appartienne à  $C_m$ , il faut et il suffit que  $\lambda$  soit solution d'une équation du second degré, qu'on établira.

Quelle inégalité  $m$  doit-il vérifier pour qu'un des points d'intersection, et un seul, appartienne au segment  $OM_1$  ?

4. On se donne un nombre réel,  $a$ , et l'on considère une courbe  $C_m$  correspondant à une valeur  $m < 1$ .

Quel est l'ensemble  $\Delta_m$  des points  $M_1$  tels que la droite  $OM_1$  coupe  $C_m$  en deux points  $M'$  et  $M''$  et que

$$\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'O}} + \frac{\overline{M''M_1}}{\overline{M''O}} = a ?$$

Montrer que, si  $m$  varie et si  $a$  reste fixe,  $\Delta_m$  passe par un point fixe.