Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C 1975 Aix en Provence ∽

Exercice 1

Partie A Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé . Les coordonnées (dans ce repère) d'un point mobile sont données en fonction du temps par

$$x = \mathrm{e}^{t}, \quad y = \mathrm{e}^{2t} - 2t.$$

M ayant $(x\,;y)$ pour coordonnées dans $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et e désigne la la base du logarithme népérien.

1. Déterminer la trajectoire (T) de M l'équation cartésienne et construction de (T).
2. Déterminer l'hodographe (H) du mouvement de M. Tracer cet hodographe dans le même repère que . (il s'agit de l'hodographe par rapport au point O).
3. Calculer l'aire de la portion de plan limitée par l'axe $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath}\right)$ par les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ et par la courbe (T).

Partie B
Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules noires, 1 boule blanche. On tire en une seule fois trois boules.
On veut la probabilité d'avoir
A : deux boules rouges au moins,
B : deux boules de même couleur au moins,
C : une boule de chaque couleur.
On admet l'équiprobabilité des tirages.

1. Proposer un espace probabilisé fini permettant la description de cette situation.
2. Calculer ensuite $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$.
   On attachera la plus grande importance au 1. Les réponses à la question 2. n'ont d'intérêt que si un espace probabilisé fini $(\Omega,\,\beta,\,p)$ a été correctement défini.

Partie C
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ désigne l'anneau des entiers « relatifs », $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On note

$$\mathrm{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} \quad \text{et } u = 1 + \mathrm{j}.$$

$|z|$ désigne le module de $z \in \mathbb{C}$. désigne le module de

1. **a.** Établir la relation $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
   Calculer u^2, u^3, $\cdots$, u^n pour toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

   b. Vérifier que $(1,\ \mathrm{j})$ est une base de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, corps des nombres réels.
2. **a.** Soit $E = \{z \in \mathbb{C} / \exists a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{Z},\ z = a + \mathrm{j}b\}$.
   Y a-t-il unicité de l'écriture d'un élément de E sous la forme $z = a + \mathrm{j}b$?
   Déterminer $U = \{z \in E,\ |z| = 1\}$.

   b. Établir que les opérations sur $\mathbb{C}$ définissent sur E une structure d'anneau unitaire.
   Déterminer les éléments inversibles (pour la multiplication) de E. Montrer que la multiplication (dans $\mathbb{C}$) définit sur U une structure de groupe.

c. Déterminer $z \in E$ tel que $z\overline{z} = 3$ et $z + \overline{z} = 0$.

d. Soit $v = 1 - \text{j}$; montrer que, si v peut être écrit $v = \lambda\mu$, $\lambda \in E$, $mu \in E$ alors $\lambda \in U$ ou $\mu \in U$.

3. **a.** Soit $I = \{\omega \in E\ /\ \exists z \in E,\ \omega = vz\}$, avec $v = 1 - \text{j}$.
Établir que I est un sous-groupe du groupe additif E.
Déterminer $\{z \in I\ /\ x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}\}$.
Démontrer que $\forall \omega \in I, \exists(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $\omega = \alpha v + \beta(vu)$ avec unicité du couple $(\alpha,\ \beta)$.

b. Soit $z = a + \text{j}b \in E$, $(a,\ b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $z - (a + b) \in I$.
En déduire que $\forall z \in E$, on a l'une des relations $z \in I$, $z - 1 \in I$, $z + 1 \in I$.

c. On définit une relation binaire entre éléments de E par

$$z\ z' \equiv z - z' \in I.$$

Vérifier que cette relation est bien une relation d'équivalence.
Vérifier que cette relation est compatible avec l'addition et la multiplication dans E.
Vérifier que l'ensemble quotient peut être muni d'une structure de corps par des opérations définies naturellement à partir des opérations dans E. Préciser la nature de ce corps (nombre d'éléments, comparaison avec un corps classique).