Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1976 ∾

EXERCICE 1

1. Déterminer suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$), le reste de la division de 4^n par 7.
2. Déterminer suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$), le reste de la division de

$$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2 \quad \text{par } 7.$$

3. On considère le nombre B qui dans le système à base quatre s'écrit :

$$B = 2103211$$

Déterminer dans le système décimal, le reste de la division du nombre B par 7.

EXERCICE 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormé.
Montrer que ($\mathcal{C}$) admet un centre de symétrie.
x étant un réel strictement négatif, déterminer

$$\int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

et étudier sa limite pour x tendant vers $-\infty$.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. On considère la courbe (H) d'équation : $x^2 - 2y^2 = 1 \quad (1)$.
   Quelle est la nature de cette courbe ? Déterminer ses sommets, ses asymptotes et la dessiner.
2. On considère dans le plan (P) le mouvement du point $M(x\,;\,y)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{1}{\cos(2t)} \\ y & = & \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{tg}\,(2t) \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$$

   a. Montrer que la trajectoire (T) est une partie de (H) que l'on précisera.

   b. Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{textV}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Vérifier que le mouvement est accéléré, c'est-à-dire que la fonction $t \longmapsto \left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$ est croissante.

Partie B

On appelle E l'ensemble des applications affines F de (P) dans (P) telles que $F(\text{O}) = \text{O}$ et $F(\text{H}) = \text{H}$ cette dernière condition exprimant que la courbe (H) est globalement invariante par F.

On appelle f l'application linéaire associée à F de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans. la base $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. **a.** Quelle peut-être, par une application affine non bijective, l'image du plan (P) ? En déduire que tout élément de E est une bijection.

   b. Montrer que (E, $\circ$) est un groupe.

2. Soit $M(x\ ;\ y)$ et $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tels que $M' = F(M)$.
   On aura

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax + cy \\ y' & = & bx + dy \end{array}\right.$$

   Sachant que $F \in \text{E}$ si et seulement si $F^{-1} \in \text{E}$, écrire l'équation de $F^{-1}(\text{H})$ en fonction de (a, b, c, d).
   En déduire que

$$F^{-1}(\text{H}) = \text{H} \iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2 - 2b^2 & = & 1 \\ c^2 - 2d^2 & = & -2 \\ ac - 2bd & = & 0 \end{array}\right.$$

   On pourra utiliser pour cela les points A(1 ; 0), B($\sqrt{3}$; 1), C($-\sqrt{3}$; 1), points qui appartiennent à la courbe (H).

3. En déduire que F est élément de E si et seulement si la matrice de f est de
   la forme $\begin{pmatrix} a & 2\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}$ avec $\epsilon \in \{-1\ ;\ +1\}$ et $a^2 - 2b^2 = 1$.

Partie C

Soit E$'$ le sous-ensemble des applications F de E telles que $\epsilon = +1$.

1. Montrer que E$'$ est stable pour $\circ$.

2. Soit (L) l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad \text{avec} \quad (x\ ;\ y) \in \mathbb{N}^2$$

   Vérifier que $M_0(1\ ;\ 0)$ et $M_1(3\ ;\ 2)$ appartiennent à (L).
   Soit F_1 l'application affine de E$'$ telle que $a = 3$ et $b = 2$.
   On considère la suite des points $M_n\left(x_n\ ;\ y_n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, telle que :

$$x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad M_{n+1} = F_1\left(M_n\right)$$

   Montrer que $M_n = F_1^n\left(M_0\right)$ où $F_1^2 = F_1 \circ F_1$ et $F_1^n = F_1^{n-1} \circ F_1$.
   Vérifier que M_n est un élément de (L).

3. Établir par récurrence que

$$\begin{array}{lcl} (3 + 2\sqrt{2})^n & = & x_n + y_n\sqrt{2} \\ (3 - 2\sqrt{2})^n & = & x_n - y_n\sqrt{2} \end{array}$$

   quel que soit n élément de $\mathbb{N}$.
   En déduire x_n et y_n en fonction de n.

4. On appelle (T) l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ de (H) pour lesquels x et y appartiennent à $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle A_n l'ensemble défini par :

$$A_n = \{M / M \in (T), x_n \leqslant x < x_{n+1}\}$$

Montrer que A_{n+1} est l'image par F_1 de A_n.
En déduire que

$$M \in A_n \Rightarrow \left[F_1^{-1}\right]^n (M) \in A_0$$

Montrer que $M \in (L) \cap A_{n+1} \Rightarrow F_1^{-1}(M) \in (L)$.
En déduire que tout point de (L) est un élément de la suite (M_n).